MEDHA AI

APPSC GROUP 2 SERVICES · QUANTITATIVE APTITUDE AND REASONING

Number system and simplification

ఉచిత నోట్స్ PDF · 14 నోట్స్ · 25 Oct 2026

Medha AI ఉచిత స్టడీ మెటీరియల్. మీ పరీక్షకు నోట్స్, ప్రాక్టీస్, మాక్ టెస్టులు, పాత పేపర్ల కోసం **app.medhaai.in** లో ఉచితంగా మొదలుపెట్టండి.

1. సంఖ్యల రకాలు, భాజనీయతా నియమాలు
2. శేషాలు, ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలు, కారణాంకాలు
3. గ.సా.భా., క.సా.గు.: పద్ధతులు, పద సమస్యలు
4. సూక్ష్మీకరణ, ఉజ్జాయింపు: బోడ్‌మాస్, కరణులు, ఘాతాంకాలు, మూలాలు
5. సంఖ్యా చిక్కుప్రశ్నలు: అంకెలు, మొత్తాలు, తేడాలు
6. దశాంశ భిన్నాలు, ఆవర్తన దశాంశాలు: మార్పిడి, పోలిక
7. వర్గాలు, వర్గమూలాలు, ఘనాలు, ఘనమూలాలు: వేగవంతమైన పద్ధతులు, అంచనా
8. కరణులు, ఘాతాంకాలు: నియమాలు, అకరణీకరణం, కరణుల పోలిక
9. ఫ్యాక్టోరియల్స్: చివరి సున్నాలు, n!లో ప్రధాన సంఖ్య గరిష్ఠ ఘాతం
10. కారణాంకాల లెక్కింపు: కారణాంకాల సంఖ్య, మొత్తం, పూర్ణ వర్గాలు, పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు
11. శేష సిద్ధాంతాలు: చక్రీయత, ఫెర్మా, విల్సన్, రుణ శేషాలు
12. సంఖ్యలపై సమస్యలు: మాటల్లోని ప్రకటనలను సమీకరణాలుగా మార్చడం
13. వేగ గణితం: గుణకారం, వర్గాలు, శాతాలకు సంక్షిప్త మార్గాలు
14. స్థాన విలువ, రోమన్ సంఖ్యలు, ఒక పరిధిలో అంకెల లెక్కింపు

1 సంఖ్యల రకాలు, భాజనీయతా నియమాలు

ఒక సంఖ్య ఏ రకానికి చెందుతుందో తెలుసుకోండి, దాని అంకెల నుంచే భాజనీయతను పరీక్షించండి. అప్పుడు "లోపించిన అంకె కనుక్కోండి", "దగ్గరి గుణిజం", "మధ్య ఎన్ని సంఖ్యలు" ప్రశ్నలు సెకన్లలో అయిపోతాయి.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **సహజ సంఖ్యలు (natural numbers):** 1, 2, 3, … **పూర్ణ సంఖ్యలు (whole numbers):** 0, 1, 2, … **పూర్ణాంకాలు (integers):** …, −2, −1, 0, 1, 2, …
- **అకరణీయ సంఖ్య (rational):** $q \neq 0$ అయ్యేలా p/q రూపంలో రాయవచ్చు; దాని దశాంశ రూపం **అంతమవుతుంది లేదా ఆవర్తనమవుతుంది**. **కరణీయ సంఖ్య (irrational):** అంతం కాని, ఆవర్తనం కాని దశాంశం ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π).
- **ప్రధాన సంఖ్య (prime):** సరిగ్గా రెండు కారణాంకాలు (1, ఆ సంఖ్యే). **1 ప్రధాన సంఖ్యా కాదు, సంయుక్త సంఖ్యా కాదు.**
- **2** ఒక్కటే సరి ప్రధాన సంఖ్య; **3** మొదటి బేసి ప్రధాన సంఖ్య; **4** అతి చిన్న సంయుక్త సంఖ్య; **9** అతి చిన్న బేసి సంయుక్త సంఖ్య.
- **100 లోపు 25 ప్రధాన సంఖ్యలు**, **50 లోపు 15 ప్రధాన సంఖ్యలు** ఉన్నాయి.
- **పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు (co-prime):** గరిష్ఠ సామాన్య భాజకం (గ.సా.భా., HCF) 1 అయ్యే రెండు సంఖ్యలు (8, 15). అవి ప్రధాన సంఖ్యలే కానక్కర్లేదు. **కవల ప్రధాన సంఖ్యల (twin primes)** మధ్య తేడా 2 (11, 13).
- **ప్రధాన సంఖ్య పరీక్ష:** $\sqrt{n}$ వరకు ఉన్న ప్రధాన సంఖ్యలతో మాత్రమే భాజనీయత చూడండి.
- **సరి-బేసి స్వభావం (parity):** బేసి ± బేసి = సరి; సరి ± బేసి = బేసి; బేసి × బేసి = బేసి; ఒక్క సరి కారణాంకం ఉన్నా లబ్ధం సరి.
- ఒక అంకె **సహజ విలువ (face value)** ఆ అంకెయే. **స్థాన విలువ** = అంకె × దాని స్థానం.
- **భాజనీయతా పరీక్షలు:**

దేనితో	నియమం
2, 5, 10	చివరి అంకె సరి / 0 లేదా 5 / 0
3, 9	అంకెల మొత్తం 3 / 9 తో నిశ్శేషంగా భాగించబడాలి
4, 25	చివరి రెండు అంకెలు 4 / 25 తో నిశ్శేషంగా భాగించబడాలి
8, 16	చివరి మూడు / చివరి నాలుగు అంకెలు 8 / 16 తో నిశ్శేషంగా భాగించబడాలి
11	(ఒకటి విడిచి ఒకటి అంకెల మొత్తం) − (మిగిలిన అంకెల మొత్తం) 0 లేదా 11 గుణిజం
6, 12, 15, 18, 24	2 మరియు 3 / 3 మరియు 4 / 3 మరియు 5 / 2 మరియు 9 / 3 మరియు 8

- రెండు భాజకాలు **పరస్పర ప్రధానాలు** అయినప్పుడే రెండు పరీక్షలను కలపండి (24 = 3 × 8, 4 × 6 కాదు).

ఉదాహరణ 1. 247 ప్రధాన సంఖ్యా? *సాధన.* $\sqrt{247}$ సుమారు 15.7, కాబట్టి 2, 3, 5, 7, 11, 13 ప్రధాన సంఖ్యలతో పరీక్షించండి. 247 = 13 × 19. **సమాధానం: కాదు, ఇది సంయుక్త సంఖ్య.**

ఉదాహరణ 2. 46,218 సంఖ్యలో 6 స్థాన విలువ నుంచి దాని సహజ విలువను తీసివేస్తే ఎంత? *సాధన.* 6 వేల స్థానంలో ఉంది: స్థాన విలువ 6,000, సహజ విలువ 6. **సమాధానం: 5,994**

ఉదాహరణ 3. 73,416 సంఖ్య 8 తో నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుందా? *సాధన.* చివరి మూడు అంకెలు 416 = 8 × 52. **సమాధానం: అవును.**

వివరణ

రకం 1: ఒక లోపించిన అంకె, ఒక భాజకం. పరీక్షను ఆ అంకెలో సమీకరణంగా రాయండి.

ఉదాహరణ 4. 58x3 సంఖ్య 11 తో నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది. x కనుక్కోండి. (a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8 *సాధన.* ఒకటి విడిచి ఒకటి మొత్తాలు: (5 + x) − (8 + 3) = x − 6. ఇది 0 లేదా 11 గుణిజం (11, 22, ...) కావాలి, కాబట్టి x = 6. సరిచూడండి: 5,863 = 11 × 533. **సమాధానం: (c) 6**

రకం 2: ఒక అంకె, రెండు భాజకాలు. కఠినమైన పరీక్షను ముందు వాడండి, తర్వాత రెండో దానితో నిర్ధారించండి.

ఉదాహరణ 5. *74381* లోస్థానంలో ఏ అంకె ఉంచితే ఆ సంఖ్య 3 మరియు 11 రెండింటితో నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది? (a) 1 (b) 4 (c) 7 (d) 9 *సాధన.* 11 కోసం: (7 + 4 + 8) − (* + 3 + 1) = 15 − , *కాబట్టి* = 4. 3 కోసం: అంకెల మొత్తం 23 + 4 = 27, ఇది 3 తో భాగించబడుతుంది. **సమాధానం: (b) 4**

రకం 3: రెండు అంకెలు, రెండు భాజకాలు. 72 = 8 × 9. 8-పరీక్షతో చివరి అంకెను, 9-పరీక్షతో మరో అంకెను నిర్ణయించండి.

ఉదాహరణ 6. 6x31y సంఖ్య 72 తో నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది. x + y కనుక్కోండి. (a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12 *సాధన.* 8 కోసం: 31y, 8 గుణిజం కావాలి; 312 ఒక్కటే సరిపోతుంది, కాబట్టి y = 2. 9 కోసం: 6 + x + 3 + 1 + 2 = 12 + x, కాబట్టి x = 6. **సమాధానం: (b) 8**

రకం 4: ఒక వ్యాప్తిలో గుణిజాలు. a నుంచి b వరకు (రెండూ కలిపి) n గుణిజాలు = ⌊b/n⌋ − ⌊(a − 1)/n⌋.

ఉదాహరణ 7. 200, 500 ల మధ్య (రెండూ కాకుండా) 9 గుణిజాలు ఎన్ని? *సాధన.* ⌊499/9⌋ − ⌊200/9⌋ = 55 − 22. **సమాధానం: 33**

ఉదాహరణ 8. 1 నుంచి 300 వరకు ఉన్న సంఖ్యల్లో 4 తో భాగించబడి, 6 తో భాగించబడనివి ఎన్ని? *సాధన.* 4 గుణిజాలు: 75. 4, 6 రెండింటితో భాగించబడటం అంటే క.సా.గు. (LCM) 12 తో భాగించబడటం: 25. 75 − 25 = 50. **సమాధానం: 50**

రకం 5: గుణిజాల మొత్తం. పదాలు = (చివరిది − మొదటిది)/n + 1; మొత్తం = పదాలు × (మొదటిది + చివరిది)/2.

ఉదాహరణ 9. 11 కి ఉన్న మూడంకెల గుణిజాలన్నింటి మొత్తం కనుక్కోండి. *సాధన.* మొదటిది 110, చివరిది 990; పదాలు = 880/11 + 1 = 81. మొత్తం = 81 × 1,100/2 = 81 × 550. **సమాధానం: 44,550**

రకం 6: దగ్గరి, అతి చిన్న, అతి పెద్ద గుణిజాలు. భాగించి, కింది లేదా పై గుణిజానికి వెళ్ళండి.

ఉదాహరణ 10. (i) 4,000 కు అత్యంత దగ్గరగా ఉండి 23 తో భాగించబడే సంఖ్య ఏది? (ii) 2,500 ను 47 తో నిశ్శేషంగా భాగించబడేలా చేయడానికి కలపవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్య ఎంత? *సాధన.* (i) 4,000 = 23 × 173 + 21. కింది గుణిజం 3,979 (21 దూరం); పై గుణిజం 4,002 (2 దూరం). (ii) 2,500 = 47 × 53 + 9, కాబట్టి 47 − 9 = 38 కలపాలి. **సమాధానం: (i) 4,002 (ii) 38**

- 37 కి అతి చిన్న ఐదంకెల గుణిజం: 10,000 = 37 × 270 + 10, కాబట్టి 37 × 271 = **10,027**. 29 కి అతి పెద్ద నాలుగంకెల గుణిజం: 9,999 = 29 × 344 + 23, కాబట్టి 9,999 − 23 = **9,976**.

వేగ చిట్కాలు.

- లోపించిన అంకె కోసం ముందు కఠినమైన పరీక్ష (8, 11), తర్వాత అంకెల మొత్తం పరీక్ష వాడండి.
- "మధ్య ఎన్ని" ప్రశ్నలకు పూర్ణ భాగం సూత్రాన్ని ఒక్కసారి రాయండి; సంఖ్యలను ఎప్పుడూ జాబితా చేయకండి.
- "మధ్య (రెండూ కాకుండా)" అంటే రెండు చివరలూ మినహాయింపు; "... నుంచి ... వరకు" అంటే రెండూ కలిపి.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

✗ "1 ప్రధాన సంఖ్య." ✓ **1 ప్రధాన సంఖ్యా కాదు, సంయుక్త సంఖ్యా కాదు**; 2 అతి చిన్న ప్రధాన సంఖ్య.

✗ "పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు రెండూ ప్రధాన సంఖ్యలే అయి ఉండాలి." ✓ పరస్పర ప్రధానం అంటే **గ.సా.భా. = 1** (8, 9 పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు).

✗ "4, 6 లతో భాగించబడుతుంది, కాబట్టి 24 తో భాగించబడుతుంది." ✓ **క.సా.గు. 12** తో మాత్రమే. పరస్పర ప్రధాన భాజకాలకే పరీక్షలను కలపండి.

✗ "6, 9 లతో భాగించబడేవి: 54 గుణిజాలను లెక్కించండి." ✓ **క.సా.గు. 18** గుణిజాలను లెక్కించండి.

✗ "200, 500 మధ్య 9 గుణిజాలు = 500/9 − 200/9 ≈ 33.3." ✓ పూర్ణ భాగాలు వాడండి: ⌊499/9⌋ − ⌊200/9⌋ = **33**.

✗ "46,218 లో 6 స్థాన విలువ 6." ✓ అది సహజ విలువ; స్థాన విలువ **6,000**.

త్వరిత పునశ్చరణ

- 1 ప్రధాన సంఖ్యా కాదు, సంయుక్త సంఖ్యా కాదు; 2 ఒక్కటే సరి ప్రధాన సంఖ్య.
- 100 లోపు 25 ప్రధాన సంఖ్యలు; 50 లోపు 15.
- అకరణీయ సంఖ్య = అంతమయ్యే లేదా ఆవర్తన దశాంశం.
- 4: చివరి రెండు అంకెలు; 8: చివరి మూడు; 16: చివరి నాలుగు.
- 3, 9: అంకెల మొత్తం. 11: ఒకటి విడిచి ఒకటి అంకెల తేడా 0 లేదా 11k.
- పరస్పర ప్రధాన భాజకాలకే పరీక్షలను కలపండి.
- [a, b] లో n గుణిజాలు = ⌊b/n⌋ − ⌊(a − 1)/n⌋.
- "రెండింటితో భాగించబడుతుంది" అంటే క.సా.గు. తో భాగించబడుతుంది.
- abcabc = abc × 1,001 = abc × 7 × 11 × 13.
- ప్రధాన సంఖ్యలను √n వరకు మాత్రమే పరీక్షించండి.

2 శేషాలు, ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలు, కారణాంకాలు

ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలు చిన్న చక్రాలలో పునరావృతమవుతాయి. శేషాలను చిన్న ముక్కలుగా చేసి లెక్కించవచ్చు. కారణాంకాల సంఖ్య నేరుగా ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం నుంచి వస్తుంది. (ఫ్యాక్టోరియల్‌లు, కారణాంకాల లెక్కింపు, శేష సిద్ధాంతాలకు ఈ యూనిట్‌లో విడివిడిగా పూర్తి నోట్స్ ఉన్నాయి: MAB-NS-09, 10, 11.)

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె చక్రాలు:**

చివరి అంకె	చక్రం	పొడవు
0, 1, 5, 6	ఎప్పుడూ అదే అంకె	1
4	4, 6 (బేసి ఘాతం 4, సరి ఘాతం 6)	2
9	9, 1 (బేసి ఘాతం 9, సరి ఘాతం 1)	2
2	2, 4, 8, 6	4
3	3, 9, 7, 1	4
7	7, 9, 3, 1	4
8	8, 4, 2, 6	4

- **నియమం:** ఘాతాన్ని 4 తో భాగించి, శేషాన్ని వాడండి; శేషం **0 అయితే 4వ పదం**.
- **విభాజ్యం = భాజకం × భాగఫలం + శేషం**; శేషం ఎప్పుడూ భాజకం కంటే తక్కువ.
- N = p^a × q^b × r^c (p, q, r ప్రధాన సంఖ్యలు) అయితే: **కారణాంకాల సంఖ్య = (a + 1)(b + 1)(c + 1)**.
- ఒక లబ్ధంలో **చివరి సున్నాలు** = 2ల సంఖ్య, 5ల సంఖ్యల్లో చిన్నది.
- **n బేసి అయితే $a^n + b^n$**, (a + b) తో నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది; **$a^n - b^n$**, (a − b) తో ఎప్పుడూ భాగించబడుతుంది, n సరి అయితే (a + b) తో కూడా.

ఉదాహరణ 1. 8^47 ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె కనుక్కోండి. *సాధన.* 47 ÷ 4 శేషం 3; 8, 4, 2, 6 లో 3వ పదం 2. **సమాధానం: 2**

ఉదాహరణ 2. 4^63 ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె కనుక్కోండి. *సాధన.* ఘాతం బేసి, కాబట్టి ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 4. **సమాధానం: 4**

ఉదాహరణ 3. 200 కు ఎన్ని కారణాంకాలు ఉన్నాయి? *సాధన.* 200 = $2^3 \times 5^2$. కారణాంకాలు = 4 × 3. **సమాధానం: 12**

వివరణ

రకం 1: లబ్ధం లేదా మొత్తం యొక్క ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె. ప్రతి ఆధారాన్ని దాని చివరి అంకెకు కుదించండి, ప్రతి ఘాతాన్ని 4 తో భాగించగా వచ్చే శేషానికి కుదించండి. తర్వాత ఒకట్ల అంకెలను గుణించండి లేదా కూడండి.

ఉదాహరణ 4. 2^37 × 7^54 × 9^21 ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె. (a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8 *సాధన.* 2^37: 37 ÷ 4 శేషం 1 → 2. 7^54: 54 ÷ 4 శేషం 2 → 9. 9^21: బేసి ఘాతం → 9. 2 × 9 × 9 = 162. **సమాధానం: (a) 2**

ఉదాహరణ 5. 3^50 + 7^50 ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె. *సాధన.* 50 ÷ 4 శేషం 2: 3^50 చివర 9, 7^50 చివర 9. 9 + 9 = 18. **సమాధానం: 8**

ఉదాహరణ 6. (1,237)^89 × (564)^22 ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె. *సాధన.* చివరి అంకెలే ముఖ్యం: 7^89 (89 ÷ 4 శేషం 1) → 7; 4^22 (సరి) → 6. 7 × 6 = 42. **సమాధానం: 2**

రకం 2: ఒక ఘాతం యొక్క శేషం. శేషం 1 (లేదా −1) ఇచ్చే చిన్న ఘాతాన్ని కనుక్కోండి. తర్వాత మిగిలిన ఘాతం మాత్రమే ముఖ్యం.

ఉదాహరణ 7. 3^41 ను 8 తో భాగిస్తే శేషం. *సాధన.* $3^2 = 9$ శేషం 1. 3^41 = (3^2)^20 × 3, కాబట్టి శేషం 3. **సమాధానం: 3**

ఉదాహరణ 8. 5^63 ను 6 తో భాగిస్తే శేషం. *సాధన.* 5 ను 6 తో భాగిస్తే శేషం −1; (−1)^63 = −1, అంటే 6 − 1. **సమాధానం: 5**

రకం 3: భాజకం యొక్క కారణాంకానికి శేషాన్ని బదిలీ చేయడం.

ఉదాహరణ 9. ఒక సంఖ్యను 255 తో భాగిస్తే శేషం 64. దానిని 15 తో భాగిస్తే శేషం ఎంత? *సాధన.* 255 కు 15 కారణాంకం; కాబట్టి సమాధానం 64 ను 15 తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం. **సమాధానం: 4**

- కొత్త భాజకం పాత భాజకానికి **కారణాంకం** అయినప్పుడే ఇది పనిచేస్తుంది.

రకం 4: బేసి, సరి, మొత్తం కారణాంకాలు. బేసి కారణాంకాలకు 2 ఘాతాన్ని వదిలేయండి; సరి కారణాంకాలు = మొత్తం − బేసి.

ఉదాహరణ 10. 1,800 కారణాంకాలలో సరి కారణాంకాలు ఎన్ని? (a) 9 (b) 18 (c) 27 (d) 36 *సాధన.* $1,800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$. మొత్తం = 4 × 3 × 3 = 36. బేసి = 3 × 3 = 9. సరి = 36 − 9. **సమాధానం: (c) 27**

వేగ చిట్కాలు.

- నాలుగు పదాల చక్రాన్ని చిత్తు కాగితం పైభాగంలో ఒక్కసారి రాయండి; అప్పుడు ఒకట్ల అంకె ప్రశ్నలు చాలావరకు ఒక్క లైన్‌లో అయిపోతాయి.
- వర్గం కాని సంఖ్యకు కారణాంకాల సంఖ్య ఎప్పుడూ **సరి**; కారణాంకాల సంఖ్య బేసి అయితే ఆ సంఖ్య పూర్ణ వర్గం.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

✗ "48 ÷ 4 శేషం 0, కాబట్టి మొదటి పదం తీసుకోవాలి; 8^48 చివర 8." ✓ శేషం 0 అంటే **4వ పదం**: 8^48 చివర **6**.

✗ "$2^3 \times 5^2$ కారణాంకాల సంఖ్య = 3 × 2 = 6." ✓ ప్రతి ఘాతానికి 1 కలపండి: 4 × 3 = **12**.

✗ "N ÷ 255 శేషం 64, కాబట్టి N ÷ 15 శేషం కూడా 64." ✓ శేషం 15 కంటే తక్కువ ఉండాలి: **4**.

✗ "1,800 సరి కారణాంకాలు = 36 ÷ 2 = 18." ✓ సరి = మొత్తం − బేసి = 36 − 9 = **27**.

✗ "$a^n + b^n$ ను a + b ఎప్పుడూ భాగిస్తుంది." ✓ **n బేసి** అయినప్పుడు మాత్రమే.

త్వరిత పునశ్చరణ

- చక్రాలు: 2, 3, 7, 8 → పొడవు 4; 4, 9 → పొడవు 2; 0, 1, 5, 6 → స్థిరం.
- ఘాతం ÷ 4 శేషం 0 అంటే చక్రంలో 4వ పదం.
- p^a q^b r^c కారణాంకాలు = (a+1)(b+1)(c+1).
- బేసి కారణాంకాలు: 2 ఘాతాన్ని వదిలేయండి. సరి = మొత్తం − బేసి.
- పూర్ణ వర్గాలకు మాత్రమే బేసి సంఖ్యలో కారణాంకాలు ఉంటాయి.
- ఘాతాల శేషాలకు, శేషం 1 లేదా −1 ఇచ్చే ఘాతాన్ని కనుక్కోండి.
- శేషం భాజకం యొక్క కారణాంకానికి మాత్రమే బదిలీ అవుతుంది.

- వరుస భాగహారం: చివరి భాగఫలం నుంచి బయటికి సంఖ్యను నిర్మించండి.
- n బేసి అయితే $a^n + b^n \div (a + b)$.
- $1! + 2! + \ldots + n!$ $(n \geq 4)$ చివర 3.

3 గ.సా.భా., క.సా.గు.: పద్ధతులు, పద సమస్యలు

ఇచ్చిన సంఖ్యలన్నింటినీ భాగించే అతి పెద్ద సంఖ్య గ.సా.భా.; అవన్నీ భాగించే అతి చిన్న సంఖ్య క.సా.గు. చాలా పద సమస్యలు ఈ రెండింటిలో ఏది కావాలి, శేషాన్ని ఎలా సర్దుబాటు చేయాలి అని మాత్రమే అడుగుతాయి.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **గ.సా.భా.** (గరిష్ఠ సామాన్య భాజకం, HCF; GCD అని కూడా అంటారు): ఇచ్చిన ప్రతి సంఖ్యనూ నిశ్శేషంగా భాగించే అతి పెద్ద సంఖ్య.
- **క.సా.గు.** (కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజం, LCM): ఇచ్చిన ప్రతి సంఖ్యతోనూ నిశ్శేషంగా భాగించబడే అతి చిన్న సంఖ్య.
- **ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతి:** గ.సా.భా. = ఉమ్మడి ప్రధాన సంఖ్యలు, వాటి **కనిష్ఠ** ఘాతాలతో; క.సా.గు. = అన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు, వాటి **గరిష్ఠ** ఘాతాలతో.
- **భాగహార (యూక్లిడ్) పద్ధతి:** పెద్ద సంఖ్యను చిన్న సంఖ్యతో భాగించండి, తర్వాత భాజకాన్ని శేషంతో భాగించండి; శేషం 0 అయ్యే వరకు ఇలా చేయండి. చివరి భాజకమే గ.సా.భా.
- **రెండు సంఖ్యలకు మాత్రమే:** గ.సా.భా. × క.సా.గు. = **ఆ సంఖ్యల లబ్ధం**. గ.సా.భా. ఎప్పుడూ క.సా.గు.ను భాగిస్తుంది.
- **భిన్నాలు** (కనిష్ఠ రూపంలో): గ.సా.భా. = లవాల గ.సా.భా. ÷ హారాల క.సా.గు.; క.సా.గు. = లవాల క.సా.గు. ÷ హారాల గ.సా.భా.
- **దశాంశాలు:** అన్ని సంఖ్యలకూ ఒకే సంఖ్యలో దశాంశ స్థానాలు ఇవ్వండి, పూర్ణ సంఖ్యలతో లెక్కించండి, తర్వాత దశాంశ స్థానాలను తిరిగి ఉంచండి.
- **కీలక పదాలు:** "గరిష్ఠ", "అతి పెద్ద పరిమాణం", "గరిష్ఠ సంఖ్యలో సమాన గుంపులు" → **గ.సా.భా.** "కనిష్ఠ", "మళ్లీ కలిసి", "మొదటిసారి అన్నీ కలిసి" → **క.సా.గు.**

ఉదాహరణ 1. 72, 120 ల గ.సా.భా., క.సా.గు. కనుక్కోండి. *సాధన.* $72 = 2^3 \times 3^2$; $120 = 2^3 \times 3 \times 5$. గ.సా.భా. = $2^3 \times 3$ = 24; క.సా.గు. = $2^3 \times 3^2 \times 5$ = 360. **సమాధానం: 24, 360**

ఉదాహరణ 2. రెండు సంఖ్యల లబ్ధం 4,320; వాటి క.సా.గు. 360. గ.సా.భా. కనుక్కోండి. *సాధన.* గ.సా.భా. = 4,320 ÷ 360. **సమాధానం: 12**

ఉదాహరణ 3. భాగహార పద్ధతిలో 493, 899 ల గ.సా.భా. కనుక్కోండి. *సాధన.* 899 = 1 × 493 + 406; 493 = 1 × 406 + 87; 406 = 4 × 87 + 58; 87 = 1 × 58 + 29; 58 = 2 × 29. **సమాధానం: 29**

వివరణ

రకం 1: గ.సా.భా. లేదా క.సా.గు.తో నిష్పత్తి. సంఖ్యలను ak, bk గా రాయండి (a, b పరస్పర ప్రధానాలు); అప్పుడు గ.సా.భా. = k, క.సా.గు. = abk.

ఉదాహరణ 4. రెండు సంఖ్యల నిష్పత్తి 4 : 5; వాటి క.సా.గు. 420. వాటి మొత్తం కనుక్కోండి. (a) 168 (b) 189 (c) 210 (d) 231 *సాధన.* క.సా.గు. = 20k = 420, కాబట్టి k = 21. సంఖ్యలు 84, 105. **సమాధానం: (b) 189**

రకం 2: ఒకే శేషం ఇచ్చే కనిష్ఠ సంఖ్య. సమాధానం = క.సా.గు. × k + శేషం (కనిష్ఠ సంఖ్యకు k = 1).

ఉదాహరణ 5. 8, 12, 18, 30 లతో భాగిస్తే శేషం 5 ఇచ్చే కనిష్ఠ సంఖ్య. *సాధన.* క.సా.గు.(8, 12, 18, 30) = $2^3 \times 3^2 \times 5$ = 360. 360 + 5. **సమాధానం: 365**

రకం 3: ఇచ్చిన శేషాలను మిగిల్చే గరిష్ఠ సంఖ్య. ప్రతి సంఖ్య నుంచి దాని శేషాన్ని తీసివేసి, గ.సా.భా. తీసుకోండి.

ఉదాహరణ 6. 1,342, 2,058 లను భాగిస్తే వరుసగా 7, 11 శేషాలు ఇచ్చే గరిష్ఠ సంఖ్య. *సాధన.* 1,342 − 7 = 1,335 = 89 × 15; 2,058 − 11 = 2,047 = 89 × 23. గ.సా.భా. = 89, ఇది రెండు శేషాల కంటే పెద్దది. **సమాధానం: 89**

రకం 4: ప్రతిసారీ ఒకే (తెలియని) శేషం ఇచ్చే గరిష్ఠ సంఖ్య. తేడాల గ.సా.భా. తీసుకోండి.

ఉదాహరణ 7. 1,277, 3,167, 6,002 లను భాగించినప్పుడు ప్రతిసారీ ఒకే శేషం ఇచ్చే గరిష్ఠ సంఖ్య. *సాధన.* తేడాలు: 1,890, 2,835, 4,725. గ.సా.భా. = 945. (ప్రతి సంఖ్యకూ శేషం 332.) **సమాధానం: 945**

రకం 5: టైల్స్, కడ్డీలు, సమాన గుంపులు (గ.సా.భా.).

ఉదాహరణ 8. 6.24 మీ. × 4.68 మీ. నేలను, కోయకుండా, సాధ్యమైనంత పెద్ద చతురస్రాకార టైల్స్‌తో పరచాలి. ఎన్ని టైల్స్ కావాలి? *సాధన.* సెం.మీ.లలో: గ.సా.భా.(624, 468) = 156, కాబట్టి టైల్ భుజం 1.56 మీ. టైల్స్ = (624 ÷ 156) × (468 ÷ 156) = 4 × 3. **సమాధానం: 12**

రకం 6: ఘంటలు, లైట్లు, పరుగుదారులు (క.సా.గు.).

ఉదాహరణ 9. మూడు ట్రాఫిక్ లైట్లు వరుసగా 40, 56, 84 సెకన్లకు ఒకసారి మారుతాయి. అవి ఉదయం 7:45:00 కి కలిసి మారాయి. మళ్లీ ఎప్పుడు కలిసి మారుతాయి? *సాధన.* క.సా.గు.(40, 56, 84) = $2^3 \times 3 \times 5 \times 7$ = 840 సెకన్లు = 14 నిమిషాలు. **సమాధానం: ఉదయం 7:59:00**

ఉదాహరణ 10. నాలుగు ఘంటలు వరుసగా 9, 12, 15, 18 నిమిషాలకు ఒకసారి మోగుతాయి, మధ్యాహ్నం 12 గంటలకు కలిసి మోగాయి. మధ్యాహ్నం 12 నుంచి 6 గంటల్లో, 12 గంటలను కూడా లెక్కిస్తే, అవి ఎన్నిసార్లు కలిసి మోగుతాయి? *సాధన.* క.సా.గు. = 180 నిమిషాలు. 360 ÷ 180 = 2 విరామాలు, కాబట్టి 2 + 1 సార్లు. **సమాధానం: 3**

వేగ చిట్కాలు.

- లెక్కించే ముందే కీలక పదం చూసి గ.సా.భా.నా క.సా.గు.నా నిర్ణయించండి.
- "గరిష్ఠ ... శేషాలు": ముందు శేషాలను తీసివేయండి. "కనిష్ఠ ... శేషం": తర్వాత దానిని కలపండి.
- "కనిష్ఠ సంఖ్య" బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నల్లో అతి చిన్న ఆప్షన్‌ను ముందుగా చివరి షరతుతో పరీక్షించండి.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

✗ "6 గంటల్లో ఘంటలు 2 సార్లు కలిసి మోగుతాయి." ✓ ప్రారంభాన్నీ లెక్కించండి: ప్రశ్న "12 గంటలను కూడా లెక్కిస్తే" అంటే **3**.

✗ "గ.సా.భా. × క.సా.గు. = మూడు సంఖ్యల లబ్ధం." ✓ ఈ నియమం **రెండు** సంఖ్యలకు మాత్రమే.

✗ "7, 11 శేషాలు ఇచ్చే గరిష్ఠ సంఖ్య: 1,342, 2,058 ల గ.సా.భా. తీసుకోండి." ✓ ముందు శేషాలు తీసివేయండి: **1,335, 2,047** ల గ.సా.భా.

✗ "ప్రతిసారీ ఒకే శేషం: సంఖ్యల గ.సా.భా. తీసుకోండి." ✓ వాటి **తేడాల** గ.సా.భా. తీసుకోండి.

✗ "భిన్నాల క.సా.గు. = లవాల క.సా.గు. ÷ హారాల క.సా.గు." ✓ హారాల **గ.సా.భా.**తో భాగించండి.

✗ "రెండు సంఖ్యలకు గ.సా.భా. 12, క.సా.గు. 90 ఉండవచ్చు." ✓ క.సా.గు. తప్పనిసరిగా **గ.సా.భా.కు గుణిజం** కావాలి; అలాంటి జత లేదు.

త్వరిత పునశ్చరణ

- గ.సా.భా.: ఉమ్మడి ప్రధాన సంఖ్యల కనిష్ఠ ఘాతాలు. క.సా.గు.: అన్ని ప్రధాన సంఖ్యల గరిష్ఠ ఘాతాలు.

- రెండు సంఖ్యలు: గ.సా.భా. × క.సా.గు. = లబ్ధం; గ.సా.భా., క.సా.గు.ను భాగిస్తుంది.
- భిన్నాలు: గ.సా.భా. = గ.సా.భా.(లవాలు)/క.సా.గు.(హారాలు); క.సా.గు. = క.సా.గు.(లవాలు)/గ.సా.భా.(హారాలు).
- ఒకే శేషం r: సమాధానం = క.సా.గు. × k + r.
- స్థిరమైన లోటు d: క.సా.గు. − d.
- ఇచ్చిన శేషాలతో గరిష్ఠ భాజకం: (సంఖ్య − శేషం) ల గ.సా.భా.
- ఒకే తెలియని శేషంతో గరిష్ఠ భాజకం: తేడాల గ.సా.భా.
- టైల్స్, సమాన గుంపులు: గ.సా.భా.; ఘంటలు, లైట్లు: క.సా.గు., ప్రారంభానికి 1 కలపండి.
- గ.సా.భా. h, క.సా.గు. l ఉండే జతలు: లబ్ధం l/h అయ్యే పరస్పర ప్రధాన జతలు.

4 సూక్ష్మీకరణ, ఉజ్జాయింపు: బోడ్‌మాస్, కరణులు, ఘాతాంకాలు, మూలాలు

సూక్ష్మీకరణ ప్రశ్నలు గణన క్రమాన్ని, కొన్ని సర్వసమీకరణాలను, అమరికను గుర్తించే అలవాటును పరీక్షిస్తాయి. అమరిక కనిపించగానే చాలా ప్రశ్నలు ఒక చిన్న పూర్ణ సంఖ్యగా మారిపోతాయి. (దశాంశాలు, మూలాలు, కరణులు–ఘాతాంకాలకు విడిగా పూర్తి నోట్స్ ఉన్నాయి: MAB-NS-06, 07, 08.)

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **బోడ్‌మాస్ (BODMAS) నియమం:** బ్రాకెట్లు → 'ఆఫ్' (Of) → భాగహారం, గుణకారం (ఎడమ నుంచి కుడికి) → కూడిక, తీసివేత (ఎడమ నుంచి కుడికి). 'ఆఫ్' అంటే గుణకారం.
- బ్రాకెట్లను లోపలి నుంచి తెరవండి: ముందు ( ), తర్వాత { }, తర్వాత [ ]. పదాలపై ఉండే గీత (రేఖా బ్రాకెట్, vinculum) బ్రాకెట్‌లాగే పనిచేస్తుంది.
- **సర్వసమీకరణాలు:**
  - $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
  - $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$; $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
  - $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$; $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
  - **$a + b + c = 0$, అయితే $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.**
- **ఘాతాంక నియమాలు:** $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $\mathbf{a^0 = 1}$; $a^{-n} = 1/a^n$.
- **అకరణీకరణం:** $1/(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})/(a - b)$.
- **శ్రేణి మొత్తాలు:** $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$; $1^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$; $1^3 + \ldots + n^3 = [n(n+1)/2]^2$.

ఉదాహరణ 1. 48 ÷ 6 × 2 + 3 of 4 − 5 ను సూక్ష్మీకరించండి. *సాధన.* ముందు 'ఆఫ్': 3 of 4 = 12. తర్వాత ఎడమ నుంచి కుడికి: 48 ÷ 6 = 8, × 2 = 16. 16 + 12 − 5. **సమాధానం: 23**

ఉదాహరణ 2. 20 − [8 − {6 − (4 − 1)}] ను సూక్ష్మీకరించండి. *సాధన.* (4 − 1) = 3; {6 − 3} = 3; [8 − 3] = 5; 20 − 5. **సమాధానం: 15**

ఉదాహరణ 3. దీర్ఘ గుణకారం లేకుండా 103 × 97 కనుక్కోండి. *సాధన.* (100 + 3)(100 − 3) = 10,000 − 9. **సమాధానం: 9,991**

వివరణ

రకం 1: మారువేషంలో సర్వసమీకరణం. సౌష్ఠవంగా అమర్చిన పెద్ద సంఖ్యలు దాదాపు ఎప్పుడూ ఏదో ఒక సర్వసమీకరణానికి సరిపోతాయి.

ఉదాహరణ 4. $[(467 + 133)^2 - (467 - 133)^2] \div (467 \times 133)$ విలువ. (a) 2 (b) 4 (c) 600 (d) 334 *సాధన.* $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$, కాబట్టి భాగఫలం 4. **సమాధానం: (b) 4**

ఉదాహరణ 5. $(0.7^3 + 0.3^3) \div (0.7^2 - 0.7 \times 0.3 + 0.3^2)$ విలువ. *సాధన.* $(a^3 + b^3)/(a^2 - ab + b^2) = a + b = 0.7 + 0.3$. **సమాధానం: 1**

ఉదాహరణ 6. $17^3 - 9^3 - 8^3$ విలువ. *సాధన.* a = 17, b = −9, c = −8 తీసుకోండి; a + b + c = 0. కాబట్టి విలువ = 3abc = 3 × 17 × (−9) × (−8). **సమాధానం: 3,672**

రకం 2: లోపించిన సంఖ్య కనుక్కోవడం. ప్రతి వైపును విడిగా సూక్ష్మీకరించి, తర్వాత సాధించండి.

ఉదాహరణ 7. 480 లో 25% + ? = 350 లో 3/5. *సాధన.* 120 + ? = 210. **సమాధానం: 90**

రకం 3: ఉజ్జాయింపు. ప్రతి సంఖ్యను సులభమైన విలువకు సవరించండి; ఆప్షన్‌లు సాధారణంగా ఒకదానికొకటి దూరంగా ఉంటాయి.

ఉదాహరణ 8. 601.8 లో 39.97% + 14.02 × 9.98 ≈ ? (a) 320 (b) 350 (c) 380 (d) 420 *సాధన.* 600 లో 40% = 240; 14 × 10 = 140; 240 + 140 = 380. (కచ్చితమైన విలువ 380.46.) **సమాధానం: (c) 380**

రకం 4: టెలిస్కోపింగ్ మొత్తాలు, లబ్ధాలు. పక్క పదాలు ఒకదానినొకటి రద్దు చేసుకునేలా ప్రతి పదాన్ని విడదీయండి.

ఉదాహరణ 9. 1/(2×3) + 1/(3×4) + … + 1/(29×30). *సాధన.* 1/(n(n+1)) = 1/n − 1/(n+1). మొత్తం = 1/2 − 1/30 = 14/30. **సమాధానం: 7/15**

ఉదాహరణ 10. (1 − 1/3)(1 − 1/4)(1 − 1/5) … (1 − 1/40). *సాధన.* = (2/3)(3/4)(4/5) … (39/40). 2/40 తప్ప అన్నీ రద్దవుతాయి. **సమాధానం: 1/20**

వేగ చిట్కాలు.

- లెక్కించే ముందు a^2, b^2, 2ab లేదా a^3, b^3 అమరికల కోసం చూడండి; సంఖ్యలను వాటిలో ఒకదానికి సరిపోయేలా ఎంచుకుంటారు.
- ఉజ్జాయింపు ప్రశ్నల్లో ఎంత స్థూలంగా సవరించాలో నిర్ణయించే ముందు ఆప్షన్‌లు ఒకదానికొకటి ఎంత దూరంలో ఉన్నాయో చూడండి.
- భాగహారం, గుణకారం ఎడమ నుంచి కుడికి జరుగుతాయి; BODMAS లో "M" ఉందని ÷ కంటే ముందు × ఎప్పుడూ చేయకండి.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

✗ "గుణకారం ముందు వస్తుంది కాబట్టి 8 ÷ 2 × 4 = 1." ✓ భాగహారం, గుణకారం **ఎడమ నుంచి కుడికి**: (8 ÷ 2) × 4 = **16**.

✗ "$x^2 + 1/x^2 = (x + 1/x)^2$." ✓ 2 తీసివేయండి: $(x + 1/x)^2 - 2$.

✗ "$x^3 + 1/x^3 = (x + 1/x)^3$." ✓ 3(x + 1/x) తీసివేయండి.

✗ "√(a + b) = √a + √b." ✓ ఇది లబ్ధాలకు మాత్రమే వర్తిస్తుంది: √(ab) = √a × √b.

✗ "1/(1×4) + … టెలిస్కోపింగ్ మొత్తం 1 − 1/31 అవుతుంది." ✓ తేడా 3 తో భాగించండి: **(1/3)(1 − 1/31)**.

✗ "$a^0 = 0$." ✓ సున్నా కాని ఏ a కైనా $a^0 = 1$.

త్వరిత పునశ్చరణ

- బోడ్‌మాస్; ÷ కంటే ముందు 'ఆఫ్'; ÷, × ఎడమ నుంచి కుడికి.
- $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$.
- $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
- $x^2 + 1/x^2 = (x + 1/x)^2 - 2$; $x^3 + 1/x^3 = (x + 1/x)^3 - 3(x + 1/x)$.
- $\Sigma n = n(n+1)/2$; $\Sigma n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$; $\Sigma n^3 = [n(n+1)/2]^2$.
- $1/(n(n+k)) = (1/k)(1/n - 1/(n+k))$.
- (1 − 1/n) వంటి లబ్ధాలు మొదటి లవం ÷ చివరి హారం గా మిగులుతాయి.

- వితత భిన్నాలు: కింది నుంచి పైకి సూక్ష్మీకరించండి.
- 1 కి దగ్గరగా ఉన్న భిన్నాలను 1 నుంచి వాటి తేడాతో పోల్చండి.
- ఆప్షన్‌ల మధ్య తేడా అనుమతించినంత స్థూలంగానే ఉజ్జాయింపు చేయండి.

5 సంఖ్యా చిక్కుప్రశ్నలు: అంకెలు, మొత్తాలు, తేడాలు

సంఖ్యను స్థాన విలువ రూపంలో రాయండి, మాటలను ఒకటి లేదా రెండు సమీకరణాలుగా మార్చండి; చాలా అంకెల చిక్కుప్రశ్నలు రెండు లైన్లలో అయిపోతాయి. (అంకెలు, పేజీ సంఖ్యల లెక్కింపు MAB-NS-14 లో ఉంది; సాధారణ పద సమస్యలు MAB-NS-12 లో ఉన్నాయి.)

ముఖ్య వాస్తవాలు

- పదుల స్థానంలో అంకె a, ఒకట్ల స్థానంలో అంకె b ఉన్న **రెండంకెల సంఖ్య** = **10a + b**; తారుమారు చేస్తే 10b + a.
  - తారుమారు సంఖ్యతో మొత్తం = **11(a + b)**.
  - తారుమారు సంఖ్యతో తేడా = **9(a − b)**.
- **మూడంకెల సంఖ్య** abc = 100a + 10b + c. abc − cba = **99(a − c)**.
- **వరుస సంఖ్యలు:** x, x + 1, x + 2. **వరుస సరి లేదా బేసి సంఖ్యలు:** x, x + 2, x + 4.
- వరుస సంఖ్యల లెక్క బేసి అయితే మధ్య సంఖ్య = **మొత్తం ÷ సంఖ్యల లెక్క**.
- **అంకశ్రేఢి (AP) లో అంకెలు:** మూడు అంకెలకు, మధ్య అంకె = అంకెల మొత్తం ÷ 3.
- అక్షర-అంకెల చిక్కుప్రశ్నల్లో (క్రిప్టారిథమ్) వేర్వేరు అక్షరాలు **వేర్వేరు అంకెలు**; మొదటి అక్షరం ఎప్పుడూ 0 కాదు.

ఉదాహరణ 1. ఒక రెండంకెల సంఖ్య అంకెల మొత్తం 9. అంకెలను తారుమారు చేస్తే సంఖ్య 27 పెరుగుతుంది. ఆ సంఖ్య కనుక్కోండి. *సాధన.* 9(b − a) = 27, కాబట్టి b − a = 3; a + b = 9. a = 3, b = 6. **సమాధానం: 36**

ఉదాహరణ 2. ఒక రెండంకెల సంఖ్య దాని తారుమారు సంఖ్య కంటే 63 ఎక్కువ, దాని అంకెల మొత్తం 11. ఆ సంఖ్య కనుక్కోండి. *సాధన.* 9(a − b) = 63, కాబట్టి a − b = 7; a + b = 11. a = 9, b = 2. **సమాధానం: 92**

ఉదాహరణ 3. మూడు వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తం 87. వాటిని కనుక్కోండి. *సాధన.* మధ్య సంఖ్య = 87 ÷ 3 = 29. **సమాధానం: 27, 29, 31**

వివరణ

రకం 1: అంకెల మొత్తానికి గుణిజంగా సంఖ్య. విస్తరించి సూక్ష్మీకరిస్తే అంకెల మధ్య సంబంధం వస్తుంది.

ఉదాహరణ 4. ఒక రెండంకెల సంఖ్య దాని అంకెల మొత్తానికి 7 రెట్లు, అది దాని తారుమారు సంఖ్య కంటే 36 ఎక్కువ. ఆ సంఖ్య కనుక్కోండి. (a) 42 (b) 63 (c) 84 (d) 73 *సాధన.* 10a + b = 7a + 7b నుంచి a = 2b. 9(a − b) = 36 నుంచి a − b = 4. కాబట్టి b = 4, a = 8. **సమాధానం: (c) 84**

రకం 2: తారుమారుతో అంకెల లబ్ధం.

ఉదాహరణ 5. ఒక రెండంకెల సంఖ్య అంకెల లబ్ధం 18. దాని నుంచి 27 తీసివేస్తే అంకెలు తారుమారవుతాయి. ఆ సంఖ్య కనుక్కోండి. *సాధన.* 9(a − b) = 27, కాబట్టి a = b + 3. (b + 3)b = 18 నుంచి b = 3, a = 6. **సమాధానం: 63**

రకం 3: మూడంకెల సంఖ్యలు.

ఉదాహరణ 6. ఒక మూడంకెల సంఖ్య అంకెలు అంకశ్రేఢిలో ఉన్నాయి, వాటి మొత్తం 12. దాని నుంచి 396 తీసివేస్తే సంఖ్య తారుమారవుతుంది. ఆ సంఖ్య కనుక్కోండి. *సాధన.* మధ్య అంకె = 12 ÷ 3 = 4. 99(a − c) = 396, కాబట్టి a − c = 4; a + c = 8. a = 6, c = 2. **సమాధానం: 642**

రకం 4: అంకెల ప్రస్తారాలతో ఏర్పడే సంఖ్యలన్నింటి మొత్తం. n వేర్వేరు అంకెలు ఉంటే, ప్రతి అంకె ప్రతి స్థానంలో (n − 1)! సార్లు వస్తుంది. మొత్తం = (అంకెల మొత్తం) × (n − 1)! × 11…1 (n ఒకట్లు).

ఉదాహరణ 7. 2, 4, 7 అంకెలను ఒక్కొక్కటి ఒక్కసారి వాడి ఏర్పరచే మూడంకెల సంఖ్యలన్నింటి మొత్తం కనుక్కోండి. *సాధన.* (2 + 4 + 7) × 2! × 111 = 13 × 2 × 111. **సమాధానం: 2,886**

రకం 5: గుర్తుల చిక్కుప్రశ్నలు. రెండు ఉదాహరణల నుంచి నియమం కనుక్కోండి, మూడో దానిపై నిర్ధారించండి, తర్వాత వర్తింపజేయండి.

ఉదాహరణ 8. 2 * 5 = 14, 3 * 4 = 21, 5 * 2 = 35 అయితే 6 * 3 విలువ ఎంత? (a) 45 (b) 54 (c) 63 (d) 36 *సాధన.* నియమం $a^2 + ab$: 4 + 10 = 14, 9 + 12 = 21, 25 + 10 = 35. కాబట్టి 36 + 18 = 54. **సమాధానం: (b) 54**

ఉదాహరణ 9. పూర్ణ సంఖ్యలకు a > b అయితే a ◊ b = a − b, a < b అయితే a + b, a = b అయితే ab. (7 ◊ 4) ◊ (3 ◊ 3) కనుక్కోండి. *సాధన.* 7 ◊ 4 = 3; 3 ◊ 3 = 9; 3 ◊ 9 = 3 + 9 (ఎందుకంటే 3 < 9). **సమాధానం: 12**

వేగ చిట్కాలు.

- పూర్తి సమీకరణాలు నిర్మించే బదులు 11(a + b), 9(a − b) సూత్రాలను నేరుగా వాడండి.
- బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నల్లో ఆప్షన్‌లను ముందుగా సులభమైన షరతుతో (తారుమారు తేడా), తర్వాత రెండో షరతుతో పరీక్షించండి.
- గుర్తుల నియమం ఇచ్చిన **ప్రతి** ఉదాహరణకూ సరిపోవాలి, రెండింటికే కాదు.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

✗ "abc − cba = 9(a − c)." ✓ మూడు అంకెలకు ఇది **99(a − c)**.

✗ "మూడు వరుస బేసి సంఖ్యలు: x, x + 1, x + 2." ✓ అవి 2 చొప్పున పెరుగుతాయి: **x, x + 2, x + 4**.

✗ "2, 4, 7 ప్రస్తారాల మొత్తం = 13 × 111." ✓ ప్రతి అంకె ప్రతి స్థానంలో **2! = 2** సార్లు వస్తుంది: 13 × 2 × 111 = **2,886**.

✗ "అంకెల మొత్తం 6 గా ఉండే మూడంకెల సంఖ్యలు = C(8, 2) = 28." ✓ వందల స్థానంలోని అంకె 0 కాకూడదు: **C(7, 2) = 21**.

✗ "నియమం మొదటి రెండు ఉదాహరణలకు సరిపోయింది, కాబట్టి సరైనదే." ✓ **ప్రతి** ఉదాహరణపై సరిచూడండి.

త్వరిత పునశ్చరణ

- రెండంకెల సంఖ్య: 10a + b; తారుమారు 10b + a.
- తారుమారుతో మొత్తం 11(a + b); తేడా 9(a − b).
- మూడంకెల సంఖ్యకు తారుమారుతో తేడా 99(a − c).
- వరుస సంఖ్యల మధ్య సంఖ్య = మొత్తం ÷ సంఖ్యల లెక్క.
- అంకశ్రేఢిలో అంకెలు: మధ్య అంకె = మొత్తం ÷ 3.
- ప్రస్తారాల మొత్తం = (అంకెల మొత్తం) × (n − 1)! × 11…1.
- అంకెల మొత్తం లెక్కింపు: మొదటి అంకెను 1 తగ్గించి, తర్వాత C(s + 2, 2).
- అక్షర–అంకెల చిక్కుప్రశ్న: ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె, ఫలితం పరిమాణం నుంచి మొదలుపెట్టండి.
- గుర్తుల నియమం ప్రతి ఉదాహరణకూ సరిపోవాలి.

6 దశాంశ భిన్నాలు, ఆవర్తన దశాంశాలు: మార్పిడి, పోలిక

ప్రతి భిన్నం అంతమయ్యే దశాంశం గానీ ఆవర్తన దశాంశం గానీ అవుతుంది. ఏది ఎప్పుడు జరుగుతుందో తెలుసుకోండి, నియమం ప్రకారం రెండు వైపులా మార్చండి, దశాంశ బిందువును ఊహించకుండా స్థానాలు లెక్కించి ఉంచండి.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **దశాంశ భిన్నం:** హారం 10 యొక్క ఘాతంగా ఉండే భిన్నం (0.07 = 7/100).
- **దశాంశం నుంచి భిన్నం:** అంకెలను లవంగా రాసి, హారంగా 1 తర్వాత దశాంశ స్థానాలు ఎన్ని ఉంటే అన్ని సున్నాలు రాయండి, తర్వాత కుదించండి: 0.875 = 875/1,000 = 7/8.
- **అంతమయ్యే పరీక్ష: కనిష్ఠ రూపంలో** ఉన్న భిన్నం హారానికి **2, 5** తప్ప వేరే ప్రధాన కారణాంకం లేకపోతేనే అది అంతమవుతుంది. దశాంశ స్థానాల సంఖ్య = 2, 5 ఘాతాల్లో పెద్దది.
- **సంకేతం:** ఈ నోట్‌లో బ్రాకెట్లలోని అంకెలు పునరావృతమవుతాయి: 0.(36) = 0.363636...; 0.2(45) = 0.2454545...
- **శుద్ధ ఆవర్తన దశాంశం** (దశాంశ బిందువు తర్వాత అన్ని అంకెలూ పునరావృతం): లవం = పునరావృతమయ్యే బ్లాక్; హారం = బ్లాక్‌లో ఎన్ని అంకెలు ఉన్నాయో అన్ని **9లు**. 0.(7) = 7/9; 0.(36) = 36/99.
- **మిశ్రమ ఆవర్తన దశాంశం:** లవం = (బిందువు తర్వాత అన్ని అంకెలు) − (పునరావృతం కాని అంకెలు); హారం = పునరావృత అంకెలు ఎన్ని ఉంటే అన్ని 9లు, వాటి తర్వాత పునరావృతం కాని అంకెలు ఎన్ని ఉంటే అన్ని 0లు. 0.2(45) = (245 − 2)/990.
- **దశాంశాల గుణకారం:** పూర్ణ సంఖ్యల్లా గుణించండి; సమాధానంలో దశాంశ స్థానాలు = దశాంశ స్థానాల **మొత్తం**.
- **దశాంశాల భాగహారం:** భాజకం పూర్ణ సంఖ్య అయ్యేవరకు రెండు సంఖ్యల్లోనూ బిందువును జరపండి.
- దశాంశం కుడి చివర సున్నాలు చేర్చినా విలువ మారదు: 0.5 = 0.50 = 0.500.

ఉదాహరణ 1. 0.875 ను కనిష్ఠ రూప భిన్నంగా రాయండి. *సాధన.* 875/1,000; 125 తో భాగించండి. **సమాధానం: 7/8**

ఉదాహరణ 2. 0.(36) ను భిన్నంగా రాయండి. *సాధన.* 36/99 = 4/11. **సమాధానం: 4/11**

ఉదాహరణ 3. 0.18 × 0.05 కనుక్కోండి. *సాధన.* 18 × 5 = 90; స్థానాలు 2 + 2 = 4, కాబట్టి 0.0090. **సమాధానం: 0.009**

వివరణ

రకం 1: మిశ్రమ ఆవర్తన దశాంశం నుంచి భిన్నం.

ఉదాహరణ 4. 0.2(45) ను కనిష్ఠ రూప భిన్నంగా రాయండి. (a) 27/110 (b) 243/999 (c) 245/990 (d) 27/99 *సాధన.* (245 − 2)/990 = 243/990; 9 తో భాగించండి: 27/110. **సమాధానం: (a) 27/110**

ఉదాహరణ 5. 3.1(6) ను భిన్నంగా రాయండి. *సాధన.* పూర్ణ భాగం 3 అలాగే ఉంటుంది. 0.1(6) = (16 − 1)/90 = 15/90 = 1/6. కాబట్టి 3 + 1/6. **సమాధానం: 19/6**

రకం 2: అంతమవుతుందా, ఎన్ని స్థానాల తర్వాత? ముందు భిన్నాన్ని కుదించండి.

ఉదాహరణ 6. వీటిలో ఏది అంతమయ్యే దశాంశాన్ని ఇవ్వదు? (a) 17/80 (b) 21/56 (c) 9/75 (d) 13/60 *సాధన.* 17/80: 80 = $2^4 \times 5$, అంతమవుతుంది. 21/56 = 3/8, అంతమవుతుంది. 9/75 = 3/25, అంతమవుతుంది. 13/60: 60 = $2^2 \times 3 \times 5$ లో 3 ఉంది. **సమాధానం: (d) 13/60**

ఉదాహరణ 7. $23/(2^3 \times 5^4)$ ఎన్ని దశాంశ స్థానాల తర్వాత అంతమవుతుంది? *సాధన.* పెద్ద ఘాతం 4, కాబట్టి 4 స్థానాలు (ఇది 0.0046 కు సమానం). **సమాధానం: 4**

రకం 3: దశాంశాల భాగహారం.

ఉదాహరణ 8. 0.0084 ÷ 0.12 కనుక్కోండి. *సాధన.* రెండింటినీ 100 తో గుణించండి: 0.84 ÷ 12 = 0.07. **సమాధానం: 0.07**

రకం 4: భిన్నాలను క్రమంలో అమర్చడం. ప్రతి దానిని 3 స్థానాల దశాంశంగా మార్చండి, లేదా జతలను అడ్డ గుణకారంతో పోల్చండి.

ఉదాహరణ 9. 4/7, 5/9, 7/12, 9/16 లను ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చండి. *సాధన.* 4/7 ≈ 0.571, 5/9 ≈ 0.556, 7/12 ≈ 0.583, 9/16 = 0.5625. **సమాధానం: 5/9 < 9/16 < 4/7 < 7/12**

రకం 5: ఆవర్తన దశాంశాల మొత్తాలు. భిన్నాలుగా మార్చి, కూడి, అవసరమైతే తిరిగి దశాంశంగా మార్చండి.

ఉదాహరణ 10. 0.(4) + 0.(5) + 0.(6) కనుక్కోండి. *సాధన.* (4 + 5 + 6)/9 = 15/9 = 5/3 = 1.(6). **సమాధానం: 5/3**

ఉదాహరణ 11. (0.6 × 0.6 − 0.4 × 0.4) ÷ (0.6 − 0.4) ను సూక్ష్మీకరించండి. *సాధన.* $(a^2 - b^2)/(a - b) = a + b = 1$. **సమాధానం: 1**

వేగ చిట్కాలు.

- సాధారణ దశాంశాలు నేర్చుకోండి: 1/8 = 0.125, 3/8 = 0.375, 5/8 = 0.625, 7/8 = 0.875, 1/16 = 0.0625, 1/7 = 0.(142857), 1/9 = 0.(1), 1/11 = 0.(09), 1/12 = 0.08(3).
- కంటితో "బిందువును జరపడం" కంటే దశాంశ స్థానాలు లెక్కించడం సురక్షితం; లెక్కను రాసి పెట్టుకోండి.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

✗ "0.2(45) = 245/999." ✓ "45" మాత్రమే పునరావృతమవుతుంది: (245 − 2)/**990** = 27/110.

✗ "56 లో 7 ఉంది కాబట్టి 21/56 అంతం కాదు." ✓ ముందు కుదించండి: 21/56 = **3/8**, ఇది అంతమవుతుంది.

✗ "0.18 × 0.05 = 0.09." ✓ స్థానాలు కలుస్తాయి: 2 + 2 = 4, కాబట్టి **0.0090 = 0.009**.

✗ "0.(9) అనేది 1 కంటే కొంచెం తక్కువ." ✓ **0.(9) = 1** కచ్చితంగా.

✗ "0.0084 ÷ 0.12 = 0.7." ✓ రెండు బిందువులనూ రెండు స్థానాలు జరపండి: 0.84 ÷ 12 = **0.07**.

త్వరిత పునశ్చరణ

- కుదించిన హారంలో 2లు, 5లు మాత్రమే ఉంటేనే అంతమవుతుంది.
- దశాంశ స్థానాలు = హారంలోని 2, 5 ఘాతాల్లో పెద్దది.
- శుద్ధ ఆవర్తనం: బ్లాక్ / అన్ని 9లు.
- మిశ్రమ ఆవర్తనం: (అన్ని అంకెలు − పునరావృతం కాని అంకెలు) / 9లు, తర్వాత 0లు.
- దశాంశాల లబ్ధం: దశాంశ స్థానాలను కూడండి.
- భాగహారం: ముందు భాజకాన్ని పూర్ణ సంఖ్యగా చేయండి.
- 0.(ab) + 0.(ba) = (a + b)/9.
- 1/7 = 0.(142857); n వ అంకెను n ను 6 తో భాగించగా వచ్చే శేషం నుంచి కనుక్కోవచ్చు.
- 0.(9) = 1.
- 1/8 = 0.125, 1/16 = 0.0625, 1/12 = 0.08(3).

7 వర్గాలు, వర్గమూలాలు, ఘనాలు, ఘనమూలాలు: వేగవంతమైన పద్ధతులు, అంచనా

కచ్చితమైన మూలాలకు కారణాంకాలుగా విడదీయండి; పెద్ద పూర్ణ వర్గాలు, సంపూర్ణ ఘనాల మూలాలను చివరి అంకె, ముందు గుంపు చూసి సెకన్లలో చదవండి; మిగిలినవాటిని a ± b/(2a) తో అంచనా వేయండి.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **30 వరకు వర్గాలు**, **15 వరకు ఘనాలు** నేర్చుకోండి. ఉపయోగకరమైనవి: $13^2 = 169$, $17^2 = 289$, $19^2 = 361$, $23^2 = 529$, $27^2 = 729$; $11^3 = 1{,}331$, $12^3 = 1{,}728$, $13^3 = 2{,}197$, $14^3 = 2{,}744$, $15^3 = 3{,}375$.
- **కారణాంకాల ద్వారా వర్గమూలం:** ప్రధాన కారణాంకాలను జతలుగా చేసి, ప్రతి జత నుంచి ఒకటి తీసుకోండి. **ఘనమూలం:** మూడేసిగా గుంపులు చేయండి.
- **పూర్ణ వర్గంలో** ప్రతి ప్రధాన ఘాతం సరి; **సంపూర్ణ ఘనంలో** ప్రతి ఘాతం 3 గుణిజం.
- **వర్గాల చివరి అంకె:** 0, 1, 4, 5, 6, 9 మాత్రమే. 2, 3, 7 లేదా 8, లేదా బేసి సంఖ్యలో సున్నాలతో వర్గం ఎప్పుడూ అంతం కాదు.

వర్గం చివర	మూలం చివర
1	1 లేదా 9
4	2 లేదా 8
9	3 లేదా 7
6	4 లేదా 6
5	5

- **ఘనాలలో** 0, 1, 4, 5, 6, 9 లకు చివరి అంకె అలాగే ఉంటుంది; **2 ↔ 8**, **3 ↔ 7** పరస్పరం మారతాయి.
- **అంకెలు:** n-అంకెల సంఖ్య వర్గానికి 2n − 1 లేదా 2n అంకెలు ఉంటాయి. 2k-అంకెల లేదా (2k − 1)-అంకెల వర్గం మూలానికి k అంకెలు ఉంటాయి.
- **దశాంశాల మూలాలు:** దశాంశ స్థానాల సంఖ్య సరి (వర్గం) లేదా 3 గుణిజం (ఘనం) కావాలి; మూలంలో వాటిలో సగం (లేదా మూడో వంతు) స్థానాలు ఉంటాయి: $\sqrt{0.0169} = 0.13$.

ఉదాహరణ 1. $\sqrt{5{,}184}$ కనుక్కోండి. *సాధన.* $5{,}184 = 2^6 \times 3^4$. మూలం $= 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9$. **సమాధానం: 72**

ఉదాహరణ 2. $\sqrt[3]{2{,}744}$ కనుక్కోండి. *సాధన.* $2{,}744 = 2^3 \times 7^3$. మూలం $= 2 \times 7$. **సమాధానం: 14**

ఉదాహరణ 3. 1,176 ను పూర్ణ వర్గంగా చేయడానికి దేనితో గుణించాలి (కనిష్ఠ సంఖ్య)? *సాధన.* $1{,}176 = 2^3 \times 3 \times 7^2$. ప్రతి ఘాతాన్ని సరి చేయండి: 2 × 3 తో గుణించండి. **సమాధానం: 6**

వివరణ

రకం 1: పెద్ద పూర్ణ వర్గం వర్గమూలం (దీర్ఘ భాగహారం లేకుండా). చివరి రెండు అంకెలను వదిలేయండి; మిగిలిన దానికి సమానమైన లేదా దాని కంటే తక్కువైన అతి పెద్ద వర్గాన్ని కనుక్కోండి; అది ముందు భాగాన్ని ఇస్తుంది. చివరి అంకె రెండు అవకాశాలు ఇస్తుంది; n(n + 1) తో పోల్చి ఎంచుకోండి.

ఉదాహరణ 4. √119,716 కనుక్కోండి. *సాధన.* చివరి అంకె 6, కాబట్టి మూలం చివర 4 లేదా 6. "16" వదిలేస్తే: 1,197. 34^2 = 1,156 ≤ 1,197 < 35^2 = 1,225, కాబట్టి మూలం 34_. 34 × 35 = 1,190 < 1,197, కాబట్టి పెద్ద చివరి అంకె, 6 తీసుకోండి. **సమాధానం: 346**

రకం 2: సంపూర్ణ ఘనం ఘనమూలం. మార్పిడి నియమంతో చివరి అంకె; చివరి మూడు అంకెలు వదిలేసి, మిగిలిన దానికి సమానమైన లేదా తక్కువైన అతి పెద్ద ఘనాన్ని కనుక్కోండి.

ఉదాహరణ 5. ∛438,976 కనుక్కోండి. *సాధన.* చివర 6, కాబట్టి మూలం చివర 6. "976" వదిలేస్తే: 438. 7^3 = 343 ≤ 438 < 8^3 = 512. **సమాధానం: 76**

రకం 3: దశాంశాల మూలాలు.

ఉదాహరణ 6. √0.000441 కనుక్కోండి. *సాధన.* ఆరు దశాంశ స్థానాలు, కాబట్టి మూలంలో మూడు. √441 = 21, అంటే 0.021. **సమాధానం: 0.021**

రకం 4: అంచనా. b చిన్నదైతే $\sqrt{(a^2 + b)} \approx a + b/(2a)$.

ఉదాహరణ 7. √83 ను రెండు దశాంశ స్థానాల వరకు అంచనా వేయండి. (a) 9.06 (b) 9.11 (c) 9.16 (d) 9.21 *సాధన.* 83 = 81 + 2: 9 + 2/18 ≈ 9.11. (అసలు విలువ 9.110.) **సమాధానం: (b) 9.11**

ఉదాహరణ 8. √5 = 2.236 అని ఇచ్చారు, 1/√5 కనుక్కోండి. *సాధన.* 1/√5 = √5/5 = 2.236 ÷ 5. **సమాధానం: 0.4472**

- భాగించే ముందు ఎప్పుడూ అకరణీకరణం చేయండి; 1 ని 2.236 తో భాగించడం నెమ్మది.

రకం 5: కలపవలసిన లేదా తీసివేయవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్య.

ఉదాహరణ 9. (i) పూర్ణ వర్గం కావడానికి 6,000 నుంచి తీసివేయవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్య. (ii) కలపవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్య. *సాధన.* 77^2 = 5,929, 78^2 = 6,084. (i) 6,000 − 5,929 = 71. (ii) 6,084 − 6,000 = 84. **సమాధానం: (i) 71 (ii) 84**

రకం 6: పూర్ణ వర్గాన్ని గుర్తించడం. చివరి అంకె, తర్వాత పదుల అంకె, తర్వాత అంకెల మూలం వాడండి.

ఉదాహరణ 10. వీటిలో ఒక్కటే పూర్ణ వర్గం: (a) 6,246 (b) 6,241 (c) 6,248 (d) 6,251 *సాధన.* (c) చివర 8: తొలగించండి. చివర 6 ఉన్న వర్గంలో పదుల అంకె **బేసి**, కాబట్టి (a) కాదు. చివర 1 ఉన్న వర్గంలో పదుల అంకె **సరి**, కాబట్టి (d) కాదు. 79^2 = 6,241. **సమాధానం: (b) 6,241**

వేగ చిట్కాలు.

- చివర 1, 4, 9 లేదా 5 ఉన్న వర్గాలకు పదుల అంకె సరి (5 కు 25); చివర 6 ఉన్న వర్గాలకు పదుల అంకె బేసి.
- వర్గం యొక్క అంకెల మూలం (పదే పదే అంకెల మొత్తం) 1, 4, 7 లేదా 9.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

✗ "√0.0169 = 0.013." ✓ నాలుగు దశాంశ స్థానాలు మూలంలో రెండు ఇస్తాయి: **0.13**.

✗ "6,246 చివర 6, కాబట్టి అది వర్గం కావచ్చు." ✓ చివర 6 ఉన్న వర్గంలో **పదుల అంకె బేసి**; 6,246 వర్గం కాదు.

✗ "438,976 ఘనమూలం చివర 4." ✓ ఘనాల్లో 6 అలాగే ఉంటుంది → మూలం చివర **6** (76). 2 ↔ 8, 3 ↔ 7 మాత్రమే మారతాయి.

✗ "1,000 వరకు వర్గాలు లేదా ఘనాలు = 31 + 10 = 41." ✓ రెండుసార్లు లెక్కించిన 3 ఆరో ఘాతాలను తీసివేయండి: **38**.

✗ "1,176 ను వర్గం చేయడానికి 3 తో గుణించండి." ✓ 2 కు కూడా బేసి ఘాతం ఉంది (2^3): **6** తో గుణించండి.

త్వరిత పునశ్చరణ

- వర్గాల చివర 0, 1, 4, 5, 6, 9 మాత్రమే.
- మూలం చివర: 1 → 1/9, 4 → 2/8, 9 → 3/7, 6 → 4/6, 5 → 5.
- ఘనమూలాలు: 2 ↔ 8, 3 ↔ 7 పరస్పరం మారతాయి; మిగిలినవి అలాగే.
- పెద్ద వర్గం: రెండు అంకెలు వదిలేసి, ముందు వర్గం కనుక్కొని, n(n + 1) తో ఎంచుకోండి.
- పెద్ద ఘనం: మూడు అంకెలు వదిలేసి, ముందు ఘనం కనుక్కోండి.
- $\sqrt{(a^2 + b)} \approx a + b/(2a)$.
- వర్గం: అన్ని ఘాతాలు సరి. ఘనం: అన్నీ 3 గుణిజాలు.
- చివర 6 ఉన్న వర్గాలకే పదుల అంకె బేసి.
- వర్గం అంకెల మూలం: 1, 4, 7, 9.
- $n = k(k - 1)$ అయితే $\sqrt{(n + \sqrt{(n + \ldots)})} = k$.

8 కరణులు, ఘాతాంకాలు: నియమాలు, అకరణీకరణం, కరణుల పోలిక

ఘాతాంక ప్రశ్నలను సాధించడానికి ప్రతి పదాన్ని ఒకే ఆధారానికి తీసుకురండి, సంయుగ్మంతో అకరణీకరణం చేయండి, కరణులను ఒకే ఘాతానికి పెంచి పోల్చండి.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **ఘాతాంక నియమాలు** (a, b > 0):
  - $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $a^m \div a^n = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$
  - $(ab)^n = a^n b^n$; $(a/b)^n = a^n/b^n$
  - $\mathbf{a^0 = 1}$; $a^{-n} = 1/a^n$; a^(m/n) = $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{(a^m)}$
- $a^x = a^y$ ($a > 0$, $a \neq 1$) అయితే, **x = y**.
- **కరణి:** అకరణీయ సంఖ్య యొక్క కరణీయ మూలం, ఉదా: √3 లేదా ∛5. √4 కరణి కాదు.
- **కరణి క్రమం:** మూల సూచిక. ∛5 అనేది 3వ క్రమపు కరణి.
- **సజాతీయ కరణులు** సూక్ష్మీకరించిన తర్వాత ఒకే కరణీయ భాగం కలిగి ఉంటాయి: √50 = 5√2 మరియు √18 = 3√2 సజాతీయ కరణులు; సజాతీయ కరణులను మాత్రమే కూడగలం.
- **అకరణీకరణ కారణాంకం:** √a కు అది √a; (√a + √b) కు అది **సంయుగ్మం** (√a − √b), ఎందుకంటే (√a + √b)(√a − √b) = a − b.
- **వేర్వేరు క్రమాల కరణుల పోలిక:** ప్రతి దానిని క్రమాల క.సా.గు. ఘాతానికి పెంచండి.

ఉదాహరణ 1. 27^(2/3) కనుక్కోండి. *సాధన.* $(\sqrt[3]{27})^2 = 3^2$. **సమాధానం: 9**

ఉదాహరణ 2. $2^x = 1/32$, అయితే x కనుక్కోండి. *సాధన.* $1/32 = 2^{-5}$. **సమాధానం: −5**

ఉదాహరణ 3. √50 + √18 − √8 ను సూక్ష్మీకరించండి. *సాధన.* 5√2 + 3√2 − 2√2. **సమాధానం: 6√2**

వివరణ

రకం 1: ఘాతీయ సమీకరణాలు. రెండు వైపులా ఒకే ఆధారంతో రాసి, ఘాతాలను సమానం చేయండి.

ఉదాహరణ 4. $9^x = 27^{(x-1)}$ అయితే x కనుక్కోండి. (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 *సాధన.* 3^(2x) = 3^(3x − 3), కాబట్టి 2x = 3x − 3. **సమాధానం: (c) 3**

ఉదాహరణ 5. 5^(x + 3) = 25^(3x − 4) అయితే x కనుక్కోండి. *సాధన.* 5^(x + 3) = 5^(6x − 8), కాబట్టి x + 3 = 6x − 8, 5x = 11. **సమాధానం: 11/5**

రకం 2: ఘాతాల సూక్ష్మీకరణ.

ఉదాహరణ 6. 16^(0.75) × 64^(−1/3) ను సూక్ష్మీకరించండి. *సాధన.* 16^(3/4) = 2^3 = 8; 64^(−1/3) = 1/4. 8 × 1/4. **సమాధానం: 2**

ఉదాహరణ 7. $(x^a/x^b)^{(a+b)} \times (x^b/x^c)^{(b+c)} \times (x^c/x^a)^{(c+a)}$ ను సూక్ష్మీకరించండి. *సాధన.* ఘాతాలు: (a − b)(a + b) + (b − c)(b + c) + (c − a)(c + a) = $(a^2 - b^2) + (b^2 - c^2) + (c^2 - a^2) = 0$. $x^0 = 1$. **సమాధానం: 1**

రకం 3: అకరణీకరణం.

ఉదాహరణ 8. $6/(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ ను అకరణీకరించండి. *సాధన.* $(\sqrt{5}-\sqrt{2})$ తో గుణించండి: $6(\sqrt{5}-\sqrt{2})/(5-2) = 2(\sqrt{5}-\sqrt{2})$. **సమాధానం: $2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$**

రకం 4: కరణి సమాసం యొక్క వర్గమూలం. $a \pm 2\sqrt{b}$ ను $(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$ గా రాయండి; ఇక్కడ $x + y = a$, $xy = b$.

ఉదాహరణ 9. $\sqrt{(11-2\sqrt{30})}$ కనుక్కోండి. *సాధన.* $x + y = 11$, $xy = 30$ కావాలి: $x = 6$, $y = 5$. మూలం $= \sqrt{6}-\sqrt{5}$ (ధనాత్మకం, ఎందుకంటే $\sqrt{6} > \sqrt{5}$). **సమాధానం: $\sqrt{6}-\sqrt{5}$**

రకం 5: వేర్వేరు క్రమాల కరణుల పోలిక.

ఉదాహరణ 10. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$ లలో ఏది పెద్దది? *సాధన.* 2, 3, 4 ల క.సా.గు. 12. ప్రతి దానిని 12వ ఘాతానికి పెంచండి: $3^6 = 729$, $4^4 = 256$, $6^3 = 216$. **సమాధానం: $\sqrt{3}$**

వేగ చిట్కాలు.

- ఘాతాల్లోని దశాంశాలను వెంటనే భిన్నాలుగా మార్చండి: 0.75 = 3/4, 0.2 = 1/5, 1.5 = 3/2.
- రకం 4 లో లోపలి మూలం కింది సంఖ్య xy లబ్ధం; బయటి సంఖ్య $x + y$ మొత్తం.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

✗ "$a^0 = 0$." ✓ సున్నా కాని ఏ a కైనా $\mathbf{a^0 = 1}$.

✗ "$a^m \times b^m = (ab)^{2m}$." ✓ ఇది $\mathbf{(ab)^m}$; ఒకే ఆధారం ఉన్నప్పుడే ఘాతాలు కలుస్తాయి.

✗ "$\sqrt{5}+\sqrt{3} = \sqrt{8}$." ✓ సజాతీయ కరణులను మాత్రమే కూడగలం; $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ ను సూక్ష్మీకరించలేం.

✗ "$\sqrt{(11-2\sqrt{30})} = \sqrt{5}-\sqrt{6}$." ✓ వర్గమూలం ధనాత్మకం: $\mathbf{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$.

✗ "$6 > 3$ కాబట్టి $\sqrt[4]{6} > \sqrt{3}$." ✓ ఒకే ఘాతం వద్ద పోల్చండి: $6^3 = 216 < 3^6 = 729$, కాబట్టి **$\sqrt{3}$ పెద్దది**.

✗ "$(2^3)^2 = 2^9$." ✓ $(a^m)^n = a^{mn} = \mathbf{2^6}$; $2^{(3^2)} = 2^9$ వేరే సమాసం.

త్వరిత పునశ్చరణ

- $a^m a^n = a^{m+n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $a^{-n} = 1/a^n$; $a^{(m/n)} = (\sqrt[n]{a})^m$.
- ఒకే ఆధారం, సమాన విలువలు: ఘాతాలను సమానం చేయండి.
- సజాతీయ కరణులను మాత్రమే కూడగలం లేదా తీసివేయగలం.
- $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ సంయుగ్మం $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; లబ్ధం $a - b$.
- $\sqrt{(a \pm 2\sqrt{b})} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$; ఇక్కడ $x + y = a$, $xy = b$.
- కరణులను వాటి క్రమాల క.సా.గు. వద్ద పోల్చండి.
- $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ మొత్తాలను వర్గం చేసి పోల్చండి.
- $2^a = 3^b = 6^c \Rightarrow 1/a + 1/b = 1/c$.
- ఘాతాల్లో 0.75 = 3/4; 0.25 = 1/4; 1.5 = 3/2.

9 ఫ్యాక్టోరియల్స్: చివరి సున్నాలు, n!లో ప్రధాన సంఖ్య గరిష్ఠ ఘాతం

ఒక ప్రధాన సంఖ్య n!లో ఎన్నిసార్లు ఉందో వరుస భాగహారంతో ($n/p + n/p^2 + \ldots$) లెక్కించండి. అప్పుడు ఫ్యాక్టోరియల్స్‌లోని సున్నాలు, ఘాతాలు, భాజనీయతపై ప్రతి ప్రశ్నా ఒక చిన్న కూడికగా మారుతుంది.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$. $0! = 1$**, $1! = 1$.
- విలువలు: 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! = 5,040, 8! = 40,320, 10! = 36,28,800.
- **n!లో ప్రధాన సంఖ్య p యొక్క గరిష్ఠ ఘాతం** (లెజెండర్ సూత్రం (Legendre's formula)): $\lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/p^2 \rfloor + \lfloor n/p^3 \rfloor + \ldots$ ($p^k > n$ అయినప్పుడు ఆపండి).
  - సంక్షిప్త రూపం: nను pతో భాగించండి, వచ్చిన భాగఫలాన్ని మళ్లీ pతో భాగించండి, అన్ని భాగఫలాలనూ కూడండి.
- **n! చివరి సున్నాలు (trailing zeros)** = n!లో 5 యొక్క గరిష్ఠ ఘాతం (n!లో 2లు ఎప్పుడూ 5ల కంటే ఎక్కువగా ఉంటాయి).
- **సంయుక్త భాజకం (composite divisor):** దాన్ని ప్రధాన సంఖ్య ఘాతాలుగా విడదీయండి, ఒక్కోదానికి పరిమితి కనుక్కోండి, వాటిలో **కనిష్ఠమైనది** తీసుకోండి.
- **5!** నుంచి ప్రతి ఫ్యాక్టోరియల్ 0తో ముగుస్తుంది; **10!** నుంచి 00తో ముగుస్తుంది.

ఉదాహరణ 1. 70! చివర ఎన్ని సున్నాలు ఉంటాయి? *సాధన.* 70/5 = 14; 14/5 = 2 (పూర్ణాంక భాగం). 14 + 2. **సమాధానం: 16**

ఉదాహరణ 2. 200! చివర ఎన్ని సున్నాలు ఉంటాయి? *సాధన.* 200/5 = 40; 40/5 = 8; 8/5 = 1. 40 + 8 + 1. **సమాధానం: 49**

ఉదాహరణ 3. 10!/7! కనుక్కోండి. *సాధన.* 10 × 9 × 8. **సమాధానం: 720**

వివరణ

రకం 1: ప్రధాన సంఖ్య గరిష్ఠ ఘాతం.

ఉదాహరణ 4. 80!ను నిశ్శేషంగా భాగించే 3 యొక్క గరిష్ఠ ఘాతం. (a) 3^{26} (b) 3^{34} (c) 3^{36} (d) 3^{40} *సాధన.* 80/3 = 26; 26/3 = 8; 8/3 = 2. 26 + 8 + 2 = 36. **సమాధానం: (c) 3^{36}**

ఉదాహరణ 5. 100!లో 7 యొక్క గరిష్ఠ ఘాతం. *సాధన.* 100/7 = 14; 14/7 = 2. **సమాధానం: 16**

రకం 2: సంయుక్త భాజకం. ప్రతి ప్రధాన సంఖ్యనూ లెక్కించండి, భాజకంలో దాని ఘాతంతో భాగించండి, కనిష్ఠమైనది తీసుకోండి.

ఉదాహరణ 6. 30!ను నిశ్శేషంగా భాగించే 12 యొక్క గరిష్ఠ ఘాతం. *సాధన.* $12 = 2^2 \times 3$. 30!లో 2 ఘాతం: 15 + 7 + 3 + 1 = 26, అంటే 2^2 ప్రతులు $\lfloor 26/2 \rfloor = 13$. 3 ఘాతం: 10 + 3 + 1 = 14. చిన్నది 13. **సమాధానం: 13**

ఉదాహరణ 7. 75!లో 15 యొక్క గరిష్ఠ ఘాతం. *సాధన.* 15 = 3 × 5. 5 ఘాతం: 15 + 3 = 18. 3 ఘాతం: 25 + 8 + 2 = 35. 5లు తక్కువగా ఉన్నాయి. **సమాధానం: 18**

రకం 3: ఫ్యాక్టోరియల్స్ లబ్ధంలో సున్నాలు. ప్రతి ఫ్యాక్టోరియల్‌లోని సున్నాలను కూడండి (ప్రతిదానిలో 2లు సమృద్ధిగా ఉంటాయి).

ఉదాహరణ 8. 25! × 30! చివర సున్నాలు. *సాధన.* 25!: 5 + 1 = 6. 30!: 6 + 1 = 7. **సమాధానం: 13**

రకం 4: "సరిగ్గా k సున్నాలు". 25 యొక్క ప్రతి గుణిజం (రెండు 5లు), 125 (మూడు) మొదలైన చోట్ల లెక్క ఒక్కసారిగా దూకుతుంది.

ఉదాహరణ 9. n యొక్క ఎన్ని విలువలకు n! సరిగ్గా 6 సున్నాలతో ముగుస్తుంది? సరిగ్గా 5 సున్నాలు ఉన్న n! ఏదైనా ఉందా? సాధన. 24!లో 4 సున్నాలు; 25!లో 5 + 1 = 6. 25!, 26!, 27!, 28!, 29!లకు లెక్క 6గానే ఉండి, 30! వద్ద 7 అవుతుంది. 4 తర్వాత లెక్క నేరుగా 6, అంటే మధ్యలో 5 రాదు; కాబట్టి సరిగ్గా 5 సున్నాలతో ముగిసే ఫ్యాక్టోరియల్ లేదు. **సమాధానం: 5 విలువలు (25 నుంచి 29); లేదు**

రకం 5: ఫ్యాక్టోరియల్ మొత్తాల శేషాలు, ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలు. k! భాజకంతో నిశ్శేషంగా భాగించబడిన తర్వాత, ఆ తర్వాతి పదాలన్నీ వదిలేయవచ్చు.

ఉదాహరణ 10. 1! + 2! + 3! + ... + 100!ను 12తో భాగించినప్పుడు శేషం. సాధన. 4! = 24. ఆ తర్వాతి ప్రతి ఫ్యాక్టోరియల్ 12తో నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది. కాబట్టి 1 + 2 + 6 = 9 మాత్రమే మిగులుతుంది. **సమాధానం: 9**

వేగ చిట్కాలు.

- చివరి సున్నాల కోసం మనసులోనే 5తో వరుసగా భాగించండి: 200 → 40 → 8 → 1.
- సంయుక్త భాజకంలో సాధారణంగా **అతిపెద్ద ప్రధాన సంఖ్యే** తక్కువగా ఉంటుంది, అయినా సరిచూసుకోండి: 30!లో 12 = 2^2 × 3కు పరిమితి 2^2 నుంచి వస్తుంది, 3 నుంచి కాదు.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

✗ "200!లో సున్నాలు = 200/5 = 40." ✓ భాగించడం కొనసాగించండి: 40 + 8 + 1 = **49**.

✗ "80!లో 3 ఘాతం = 80/3 = 26." ✓ 8నూ, 2నూ కూడా కూడండి: **36**.

✗ "30!లో 12 గరిష్ఠ ఘాతం = 3 ఘాతం = 14." ✓ 2^2లో ప్రతి ప్రతికీ రెండు 2లు కావాలి: ⌊26/2⌋ = **13**, ఇదే చిన్నది.

✗ "ప్రతి పూర్ణ సంఖ్య సున్నాల లెక్కా ఏదో ఒక n!కు వస్తుంది." ✓ లెక్క 25, 50, 75, 125, ... వద్ద దూకుతుంది; సరిగ్గా **5** సున్నాలతో ముగిసే n! లేదు.

✗ "ఏ లబ్ధంలోనైనా సున్నాలు = 5ల సంఖ్య." ✓ ఇది n!కు నిజం, ప్రతి లబ్ధానికీ కాదు; 2లు, 5లు **రెండింటినీ** లెక్కించండి.

✗ "0! = 0." ✓ **0! = 1**.

త్వరిత పునశ్చరణ

- n!లో ప్రధాన సంఖ్య p ఘాతం = ⌊n/p⌋ + ⌊n/p^2⌋ + ...
- n! సున్నాలు = n!లో 5 ఘాతం.
- సంయుక్త భాజకం: ప్రతి ప్రధాన సంఖ్య ఘాతానికి పరిమితి కనుక్కుని, కనిష్ఠమైనది తీసుకోండి.
- 0! = 1; 5! = 120; 7! = 5,040; 10! = 36,28,800.
- 5! నుంచి 0తో ముగుస్తుంది; 10! నుంచి 00తో ముగుస్తుంది.
- 24!లో 4 సున్నాలు, 25!లో 6: సరిగ్గా 5 సున్నాలు ఉన్న ఫ్యాక్టోరియల్ లేదు.
- 250!లో 62 సున్నాలు (249!లో 59): 125 యొక్క ప్రతి గుణిజం వద్ద లెక్క కనీసం 3 దూకుతుంది.
- ఫ్యాక్టోరియల్ మొత్తాలు: భాజకంతో నిశ్శేషంగా భాగించబడే ప్రతి పదాన్నీ వదిలేయండి.

- ఘాతాల లబ్ధాలు: 2లను, 5లను వేర్వేరుగా లెక్కించండి.

10 కారణాంకాల లెక్కింపు: కారణాంకాల సంఖ్య, మొత్తం, పూర్ణ వర్గాలు, పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు

N ను ఒక్కసారి ప్రధాన సంఖ్య ఘాతాల లబ్ధంగా రాయండి. దాని కారణాంకాల సంఖ్య, మొత్తం, లబ్ధం, "ఎన్ని కారణాంకాలు ... అవుతాయి" అనే ప్రతి ప్రశ్నా ఘాతాంకాల ఎంపికలను లెక్కించడంతో తేలిపోతాయి.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **$N = p^a \times q^b \times r^c$** అనుకోండి (p, q, r వేర్వేరు ప్రధాన సంఖ్యలు).
- **కారణాంకాల సంఖ్య** = (a + 1)(b + 1)(c + 1). (ప్రతి ప్రధాన సంఖ్య ఘాతాంకం 0 నుంచి a వరకు ఉండవచ్చు.)
- **కారణాంకాల మొత్తం** = $(1 + p + \ldots + p^a)(1 + q + \ldots + q^b)(1 + r + \ldots + r^c)$.
- **కారణాంకాల లబ్ధం** = N^(d/2), ఇక్కడ d = కారణాంకాల సంఖ్య.
- **బేసి కారణాంకాలు:** 2 ఘాతాన్ని వదిలేయండి. **సరి కారణాంకాలు** = మొత్తం − బేసి.
- **పూర్ణ వర్గాలకు** (వాటికి మాత్రమే) **బేసి** సంఖ్యలో కారణాంకాలు ఉంటాయి.
- ఒక సంఖ్యకు **సరిగ్గా 3 కారణాంకాలు** ఉండేది అది ఒక ప్రధాన సంఖ్య వర్గమైతేనే.
- **పరిపూర్ణ సంఖ్య (perfect number):** ఆ సంఖ్య తప్ప మిగతా కారణాంకాల మొత్తం ఆ సంఖ్యకే సమానం (6, 28, 496).
- **N వరకు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు (co-prime numbers)** (ఆయిలర్ φ): $\varphi(N) = N \times (1 - 1/p)(1 - 1/q)(1 - 1/r)$.

ఉదాహరణ 1. 540కి ఎన్ని కారణాంకాలు ఉన్నాయి? *సాధన.* $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$. కారణాంకాలు = 3 × 4 × 2. **సమాధానం: 24**

ఉదాహరణ 2. 72 కారణాంకాల మొత్తం కనుక్కోండి. *సాధన.* $72 = 2^3 \times 3^2$. మొత్తం = (1 + 2 + 4 + 8)(1 + 3 + 9) = 15 × 13. **సమాధానం: 195**

ఉదాహరణ 3. 196కి బేసి సంఖ్యలో కారణాంకాలు ఉన్నాయా, సరి సంఖ్యలోనా? *సాధన.* $196 = 14^2 = 2^2 \times 7^2$, ఇది పూర్ణ వర్గం: 3 × 3 = 9 కారణాంకాలు. **సమాధానం: బేసి (9)**

వివరణ

రకం 1: బేసి, సరి కారణాంకాలు.

ఉదాహరణ 4. 2,160కి ఎన్ని సరి కారణాంకాలు ఉన్నాయి? (a) 8 (b) 24 (c) 32 (d) 40 *సాధన.* $2{,}160 = 2^4 \times 3^3 \times 5$. మొత్తం = 5 × 4 × 2 = 40. బేసి = 4 × 2 = 8. సరి = 40 − 8. **సమాధానం: (c) 32**

రకం 2: k యొక్క గుణిజాలైన కారణాంకాలు. k ప్రధాన సంఖ్యలను కారణాంకంలో తప్పనిసరిగా ఉంచి, మిగిలిన ఎంపికలను లెక్కించండి.

ఉదాహరణ 5. 1,080 కారణాంకాల్లో ఎన్ని 6తో నిశ్శేషంగా భాగించబడతాయి? *సాధన.* $1{,}080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$. 6తో నిశ్శేషంగా భాగించబడే కారణాంకానికి 2 ఘాతం 1–3 (3 ఎంపికలు), 3 ఘాతం 1–3 (3 ఎంపికలు), 5 ఘాతం 0–1 (2 ఎంపికలు) కావాలి. 3 × 3 × 2. **సమాధానం: 18**

- సంక్షిప్త మార్గం: kతో నిశ్శేషంగా భాగించబడే N కారణాంకాలు = N/k కారణాంకాలు (ఇక్కడ $1{,}080/6 = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \rightarrow 18$).

రకం 3: పూర్ణ వర్గాలైన కారణాంకాలు. సరి ఘాతాంకాలను మాత్రమే అనుమతించండి.

ఉదాహరణ 6. 3,600 కారణాంకాల్లో ఎన్ని పూర్ణ వర్గాలు? *సాధన.* $3,600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$. సరి ఘాతాంకాలు: 2 → {0, 2, 4} = 3; 3 → {0, 2} = 2; 5 → {0, 2} = 2. 3 × 2 × 2. **సమాధానం: 12**

రకం 4: కారణాంకాల లబ్ధం.

ఉదాహరణ 7. 36 యొక్క అన్ని కారణాంకాల లబ్ధం కనుక్కోండి. *సాధన.* 36కి 9 కారణాంకాలు. లబ్ధం = 36^(9/2) = 6^9. **సమాధానం: 6^9**

రకం 5: N ను రెండు కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసే మార్గాలు. క్రమం లేని జతలు = పూర్ణ వర్గం కానిదానికి d/2; పూర్ణ వర్గానికి (d + 1)/2 (k × k ను ఒకసారే లెక్కిస్తూ).

ఉదాహరణ 8. 420ని రెండు సహజ సంఖ్యల లబ్ధంగా ఎన్ని రకాలుగా రాయవచ్చు (క్రమం లెక్కలోకి రాదు)? 144ని? *సాధన.* 420 = $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$కి 24 కారణాంకాలు → 12 జతలు. 144 = $2^4 \times 3^2$కి 15 కారణాంకాలు → (15 + 1)/2 = 8. **సమాధానం: 12; 8**

రకం 6: పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యల లెక్క.

ఉదాహరణ 9. 1 నుంచి 60 వరకు ఉన్న సంఖ్యల్లో ఎన్ని 60కి పరస్పర ప్రధానాలు? *సాధన.* 60 = $2^2 \times 3 \times 5$. φ = 60 × 1/2 × 2/3 × 4/5. **సమాధానం: 16**

ఉదాహరణ 10. 360 బేసి కారణాంకాల మొత్తం. *సాధన.* 360 బేసి భాగం = $3^2 \times 5$. మొత్తం = (1 + 3 + 9)(1 + 5) = 13 × 6. **సమాధానం: 78**

వేగ చిట్కాలు.

- సూత్రం వాడే ముందు ఎప్పుడూ పూర్తిగా ప్రధాన కారణాంకాలుగా విడదీయండి; 3,600 అంటే $2^4 \times 3^2 \times 5^2$, 36 × 100 కాదు.
- "kతో నిశ్శేషంగా భాగించబడే" వాటికి N/k సంక్షిప్త మార్గం వాడండి; "kతో భాగించబడని" వాటికి మొత్తం నుంచి తీసివేయండి.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

✗ "$2^4 \times 3^3 \times 5$ కారణాంకాలు = 4 × 3 × 1 = 12." ✓ ప్రతి ఘాతాంకానికీ 1 కలపండి: 5 × 4 × 2 = **40**.

✗ "సరి కారణాంకాలు = మొత్తంలో సగం." ✓ సరి = మొత్తం − బేసి: సంఖ్య 2,160, సరి = 40 − 8 = **32**.

✗ "144ని రెండు సంఖ్యల లబ్ధంగా రాసే మార్గాలు = 15/2." ✓ పూర్ణ వర్గానికి ముందు 1 కలపండి: (15 + 1)/2 = **8**.

✗ "12 కారణాంకాలు ఉన్న అతి చిన్న సంఖ్య 2^{11} లేదా 72." ✓ ప్రతి ఘాతాంక నమూనానూ ప్రయత్నించండి: **60** = $2^2 \times 3 \times 5$.

✗ "సరిగ్గా 3 కారణాంకాలు ఉన్న సంఖ్య ఏ పూర్ణ వర్గమైనా కావచ్చు." ✓ అది **ప్రధాన సంఖ్య వర్గం** కావాలి (36కి 9 కారణాంకాలు).

త్వరిత పునశ్చరణ

- $N = p^a q^b r^c$: కారణాంకాలు (a+1)(b+1)(c+1).
- కారణాంకాల మొత్తం: $(1 + p + \ldots + p^a)$ల లబ్ధం.
- కారణాంకాల లబ్ధం: N^(d/2).
- బేసి కారణాంకాలు: 2లను వదిలేయండి; సరి = మొత్తం − బేసి.
- kతో నిశ్శేషంగా భాగించబడే కారణాంకాలు = N/k కారణాంకాలు.
- వర్గ కారణాంకాలు: సరి ఘాతాంకాలు మాత్రమే.
- బేసి సంఖ్యలో కారణాంకాలు ⇔ పూర్ణ వర్గం.

- సరిగ్గా 3 కారణాంకాలు ⇔ ప్రధాన సంఖ్య వర్గం.
- $\varphi(N) = N(1 - 1/p)(1 - 1/q)\ldots$; N కంటే తక్కువ పరస్పర ప్రధానాల మొత్తం = $N\varphi(N)/2$.
- d కారణాంకాలు ఉన్న అతి చిన్న సంఖ్య: అతిపెద్ద ఘాతాంకం అతి చిన్న ప్రధాన సంఖ్యకు; అన్ని నమూనాలూ ప్రయత్నించండి.

11 శేష సిద్ధాంతాలు: చక్రీయత, ఫెర్మా, విల్సన్, రుణ శేషాలు

ప్రతి సంఖ్య స్థానంలో దాని శేషాన్ని (లేదా చిన్న రుణ శేషాన్ని) ఉంచండి, 1 లేదా −1, ఇలాంటి శేషం ఇచ్చే ఘాతాన్ని కనుక్కోండి. అప్పుడు ఎంత పెద్ద సమాసానికైనా శేషం రెండు లైన్లలో తేలుతుంది.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **భాగహారం:** విభాజ్యం = భాజకం × భాగఫలం + శేషం; ఇక్కడ 0 ≤ శేషం < భాజకం.
- **మొత్తం, లబ్ధం నియమాలు:** మొత్తం (లేదా లబ్ధం) యొక్క శేషం = శేషాల మొత్తం (లేదా లబ్ధం) యొక్క శేషం.
- **రుణ శేషం (negative remainder):** భాజకం కంటే కొంచెం తక్కువ ఉన్న సంఖ్యను రుణంగా వాడవచ్చు: 100 పై 98 అంటే −2. భాజకాన్ని కలిపి మళ్లీ ధన శేషంగా మార్చండి.
- **చక్రీయత (cyclicity):** a^n ఘాతాలను mతో భాగిస్తే వచ్చే శేషాలు మళ్లీ మళ్లీ పునరావృతమవుతాయి; శేషం 1 ఇచ్చే మొదటి ఘాతాన్ని కనుక్కోండి.
- **ఫెర్మా చిన్న సిద్ధాంతం (Fermat's little theorem):** p ప్రధాన సంఖ్య, a ను p భాగించకపోతే, **a^(p − 1) ను pతో భాగిస్తే శేషం 1**.
- **విల్సన్ సిద్ధాంతం (Wilson's theorem):** p ప్రధాన సంఖ్య అయితే, **(p − 1)! ను pతో భాగిస్తే శేషం p − 1** (అంటే −1).
- **ఆయిలర్ సిద్ధాంతం (Euler's theorem)** (ఏ m కైనా): a, m పరస్పర ప్రధానాలైతే, a^φ(m) ను mతో భాగిస్తే శేషం 1 (φ MAB-NS-10లో ఉన్నట్లే).
- **బీజగణితం:** $a^n - b^n$, a − bతో నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది; n సరి సంఖ్య అయితే a + bతో కూడా. n బేసి సంఖ్య అయితే $a^n + b^n$, a + bతో నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

ఉదాహరణ 1. 47 × 53 × 61 ను 9తో భాగిస్తే శేషం. *సాధన.* శేషాలు 2, 8, 7. 2 × 8 × 7 = 112, దీని శేషం 4. **సమాధానం: 4**

ఉదాహరణ 2. 98 × 99 ను 100తో భాగిస్తే శేషం. *సాధన.* (−2) × (−1) = 2. **సమాధానం: 2**

ఉదాహరణ 3. 2^{100} ను 7తో భాగిస్తే శేషం. *సాధన.* $2^3 = 8$ శేషం 1 ఇస్తుంది. $2^{100} = (2^3)^{33} \times 2$. **సమాధానం: 2**

వివరణ

రకం 1: ప్రధాన భాజకానికి ఫెర్మా.

ఉదాహరణ 4. 5^{62} ను 13తో భాగిస్తే శేషం. (a) 1 (b) 5 (c) 12 (d) 8 *సాధన.* 13 ప్రధాన సంఖ్య, కాబట్టి 5^{12} శేషం 1. 62 = 12 × 5 + 2, కాబట్టి శేషం 5^2 = 25 శేషమే, అంటే 12. **సమాధానం: (c) 12**

- ఇంకా వేగంగా: 5^2 = 25 శేషం −1, కాబట్టి 5^4 శేషం 1; $5^{62} = (5^4)^{15} \times 5^2 \rightarrow -1$, అంటే 12.

ఉదాహరణ 5. 3^{200} ను 11తో భాగిస్తే శేషం. *సాధన.* ఫెర్మా: 3^{10} శేషం 1 (నిజానికి 3^5 = 243 = 22 × 11 + 1 కే శేషం 1 వస్తుంది). 200 అనేది 5 యొక్క గుణిజం. **సమాధానం: 1**

రకం 2: ఫ్యాక్టోరియల్స్‌కు విల్సన్.

ఉదాహరణ 6. (i) 22! ను, (ii) 21! ను 23తో భాగిస్తే శేషాలు. *సాధన.* (i) 23 ప్రధాన సంఖ్య, కాబట్టి 22! శేషం −1, అంటే 22. (ii) 22! = 22 × 21!, 22 శేషం −1. కాబట్టి (−1) × (21!) శేషం −1, అంటే 21! శేషం 1. **సమాధానం: (i) 22 (ii) 1**

రకం 3: పెద్ద ఘాతాలతో రుణ శేషాలు.

ఉదాహరణ 7. 2^{203} ను 17తో భాగిస్తే శేషం. *సాధన.* 2^4 = 16 శేషం −1, కాబట్టి 2^8 శేషం 1. 203 = 8 × 25 + 3, కాబట్టి శేషం 2^3 శేషమే. **సమాధానం: 8**

ఉదాహరణ 8. $29^{36} - 1$ ను వీటిలో ఏది నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది: 28, 30, రెండూ, లేదా ఏదీ కాదు? సాధన. $a^n - 1$ ఎప్పుడూ $a - 1 = 28$తో నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది; 36 సరి సంఖ్య కాబట్టి $a + 1 = 30$తో కూడా. **సమాధానం: రెండూ**

రకం 4: పూర్ణాంకాలను వరుసగా రాసి ఏర్పడిన సంఖ్యలు. 3, 9 లకు అంకెల మొత్తాన్ని; 2, 4, 8 లకు చివరి అంకెలను వాడండి.

ఉదాహరణ 9. N = 123456789101112...3940 (1 నుంచి 40 వరకు వరుసగా రాసినది). N ను 9తో, 8తో భాగిస్తే శేషాలు కనుక్కోండి. సాధన. అంకెల మొత్తానికి 9 పై వచ్చే శేషం, 1 + 2 + ... + 40 = 820 కు వచ్చే శేషంతో సమానం; 820 శేషం 1. 8 కోసం చివరి మూడు అంకెలు 940 తీసుకోండి; దాని శేషం 4. **సమాధానం: 1, 4**

రకం 5: భాగహార లెక్క సంబంధాలు.

ఉదాహరణ 10. ఒక భాగహార లెక్కలో భాజకం భాగఫలానికి 12 రెట్లు, శేషానికి 4 రెట్లు. శేషం 18. విభాజ్యం కనుక్కోండి. సాధన. భాజకం = 4 × 18 = 72; భాగఫలం = 72 ÷ 12 = 6. విభాజ్యం = 72 × 6 + 18. **సమాధానం: 450**

వేగ చిట్కాలు.

- భాజకం కంటే 1 ఎక్కువ లేదా 1 తక్కువ ఉన్న ఆధార సంఖ్య కోసం చూడండి: 36 పై 37 శేషం 1, 36 పై 35 శేషం −1.
- $a^n + b^n$ లేదా $a^n - b^n$ లో $a + b$ లేదా $a - b$ భాజకానికి సమానమైతే, ఏ లెక్కా లేకుండానే శేషం 0.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

✗ "98 × 99 ను 100తో భాగిస్తే శేషం −2 × −1 = −2." ✓ (−2)(−1) = **+2**.

✗ "ఫెర్మా ఏ భాజకానికైనా వర్తిస్తుంది: 9 పై 2^8 శేషం 1." ✓ ఫెర్మాకు **ప్రధాన సంఖ్య** కావాలి; భాజకం 9, దానిపై 2^6 శేషం 1 (ఆయిలర్, φ(9) = 6), 2^8 శేషం 4.

✗ "విల్సన్ ప్రకారం 23 పై 21! శేషం 22." ✓ విల్సన్ ఇచ్చేది **22!** → 22; తర్వాత **21!** → **1**.

✗ "$17^{23} + 23^{23}$ ను 40తో భాగించడానికి ఘాతాలు లెక్కించాలి." ✓ బేసి ఘాతం, 17 + 23 = 40: శేషం **0**.

✗ "రుణ శేషమే తుది సమాధానం." ✓ భాజకాన్ని కలపండి: 13 పై −1 అంటే **12**.

త్వరిత పునశ్చరణ

- మొత్తం/లబ్ధం శేషం = శేషాల మొత్తం/లబ్ధం.
- భాజకం కంటే కొంచెం తక్కువ ఉన్న సంఖ్యలకు రుణ శేషాలు వాడండి.
- ఫెర్మా: ప్రధాన సంఖ్య p పై a^(p−1) → 1 (p ∤ a).
- విల్సన్: ప్రధాన సంఖ్య p పై (p − 1)! → p − 1; (p − 2)! → 1.
- ఆయిలర్: పరస్పర ప్రధానాలు a, m అయితే m పై a^φ(m) → 1.
- $a^n - b^n \div (a - b)$ ఎప్పుడూ; $\div (a + b)$ n సరి అయితే.
- $a^n + b^n \div (a + b)$ n బేసి అయితే.
- చివరి రెండు అంకెలు = 100 పై శేషం; $7^4 = 2{,}401$.
- సంయుక్త భాజకాన్ని పరస్పర ప్రధాన భాగాలుగా విడదీసి, ఫలితాలను కలపండి.
- వరుస సంఖ్యలు: 3, 9 లకు అంకెల మొత్తం; 2, 4, 8 లకు చివరి అంకెలు.

12 సంఖ్యలపై సమస్యలు: మాటల్లోని ప్రకటనలను సమీకరణాలుగా మార్చడం

తెలియని రాశికి ఒక పేరు పెట్టండి, ప్రతి పదబంధాన్నీ గుర్తులుగా మార్చండి, ఒకటి లేదా రెండు సులభమైన సమీకరణాలను సాధించండి. బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నల్లో (MCQs) ఆప్షన్లను షరతులతో సరిచూడటం చాలాసార్లు ఇంకా వేగం.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **అనువాద పట్టిక:**

మాటలు	గుర్తులు
ఒక సంఖ్యను 7 పెంచితే / y కంటే 7 ఎక్కువ	$x + 7$ / $x = y + 7$
ఒక సంఖ్యలో 3/5 వంతు	$(3/5)x$
రెండు సంఖ్యల భేదం 6	$x - y = 6$
ఒక సంఖ్య వ్యుత్క్రమం	$1/x$
మూడు వరుస సంఖ్యలు	$x - 1, x, x + 1$

- **మొత్తం S, భేదం D:** పెద్దది = $(S + D)/2$, చిన్నది = $(S - D)/2$.
- **మొత్తం S, లబ్ధం P:** $(x - y)^2 = S^2 - 4P$; $x^2 + y^2 = S^2 - 2P$.
- మూడు వరుస సంఖ్యలకు **మధ్య సంఖ్యను** x గా తీసుకోండి: మొత్తం $3x$, వర్గాల మొత్తం $3x^2 + 2$.
- **భిన్నాలు:** భిన్నాన్ని n/d అనండి; ప్రతి షరతు ఒక సమీకరణాన్ని ఇస్తుంది.
- విభాజ్యం = భాజకం × భాగఫలం + శేషం.

ఉదాహరణ 1. ఒక సంఖ్యకు దానిలో 3/5 వంతును కలిపితే 64 వస్తుంది. ఆ సంఖ్య కనుక్కోండి. *సాధన.* $(8/5)x = 64$. **సమాధానం: 40**

ఉదాహరణ 2. రెండు సంఖ్యల మొత్తం 50 కాగా భేదం 14. వాటిని కనుక్కోండి. *సాధన.* $(50 + 14)/2 = 32$, $(50 - 14)/2 = 18$. **సమాధానం: 32, 18**

ఉదాహరణ 3. ఒక సంఖ్యకు, దానిలో ఐదింట రెండు వంతులకు మధ్య భేదం 36. ఆ సంఖ్య కనుక్కోండి. *సాధన.* $(3/5)x = 36$. **సమాధానం: 60**

వివరణ

రకం 1: మొత్తం, లబ్ధం ఇచ్చినప్పుడు. ఒక్కో సంఖ్యను కనుక్కునే బదులు సర్వసమీకరణాలు వాడండి.

ఉదాహరణ 4. రెండు సంఖ్యల మొత్తం 17 కాగా లబ్ధం 72. (i) వాటి భేదం, (ii) వాటి వర్గాల మొత్తం కనుక్కోండి. (a) 1, 145 (b) 1, 217 (c) 3, 145 (d) 7, 217 *సాధన.* $(x - y)^2 = 289 - 288 = 1$, కాబట్టి భేదం 1. $x^2 + y^2 = 289 - 144 = 145$. (సంఖ్యలు 8, 9.) **సమాధానం: (a) 1, 145**

రకం 2: సంఖ్య, దాని వ్యుత్క్రమం.

ఉదాహరణ 5. ఒక సంఖ్యకు దాని వ్యుత్క్రమాన్ని కలిపితే 26/5. ఆ సంఖ్య కనుక్కోండి. *సాధన.* $x + 1/x = 5 + 1/5$, కాబట్టి $x = 5$ లేదా 1/5. **సమాధానం: 5 లేదా 1/5**

రకం 3: భిన్నాలపై సమస్యలు.

ఉదాహరణ 6. ఒక భిన్నం లవం, హారం రెండింటికీ 1 కలిపితే అది 2/3 అవుతుంది. రెండింటి నుంచీ 1 తీసివేస్తే 1/2 అవుతుంది. ఆ భిన్నం కనుక్కోండి. *సాధన.* 3(n + 1) = 2(d + 1), 2(n − 1) = d − 1. రెండో దాని నుంచి d = 2n − 1; ప్రతిక్షేపిస్తే: 3n + 3 = 4n, కాబట్టి n = 3, d = 5. సరిచూడండి: 4/6 = 2/3, 2/4 = 1/2. **సమాధానం: 3/5**

రకం 4: తప్పు గణన. (సరైన ఫలితం) − (తప్పు ఫలితం) = ఇచ్చిన తేడా అని రాయండి.

ఉదాహరణ 7. ఒక విద్యార్థి ఒక సంఖ్యను 5/3 కు బదులు 3/5 తో గుణించి, సరైన సమాధానం కంటే 32 తక్కువ పొందాడు. ఆ సంఖ్య కనుక్కోండి. *సాధన.* (5/3 − 3/5)x = (16/15)x = 32. **సమాధానం: 30**

రకం 5: వరుస సంఖ్యలు.

ఉదాహరణ 8. మూడు వరుస సహజ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తం 434. ఆ సంఖ్యలు కనుక్కోండి. *సాధన.* మధ్య సంఖ్య x అయితే: $3x^2 + 2 = 434$, కాబట్టి $x^2 = 144$, x = 12. **సమాధానం: 11, 12, 13**

రకం 6: ఒక సంఖ్యను భాగాలుగా విభజించడం.

ఉదాహరణ 9. 75ని రెండు భాగాలుగా విభజించండి: మొదటి భాగంలో మూడో వంతు, రెండో భాగంలో ఐదో వంతు కలిపితే 19 రావాలి. *సాధన.* x/3 + (75 − x)/5 = 19. 15తో గుణిస్తే: 5x + 225 − 3x = 285, కాబట్టి x = 30. **సమాధానం: 30, 45**

రకం 7: భాగఫలం, శేషం ప్రకటనలు.

ఉదాహరణ 10. రెండు సంఖ్యల్లో పెద్దదాని మూడు రెట్లను చిన్నదానితో భాగిస్తే భాగఫలం 5 కాగా శేషం 4. ఆ సంఖ్యల భేదం 26. వాటిని కనుక్కోండి. *సాధన.* 3L = 5S + 4, L = S + 26. కాబట్టి 3S + 78 = 5S + 4, S = 37, L = 63. సరిచూడండి: 189 = 5 × 37 + 4. **సమాధానం: 63, 37**

వేగ చిట్కాలు.

- బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నల్లో ఏ సమీకరణం రాయకముందే, సరిచూడటానికి అతి సులభమైన షరతులో (తరచూ మొత్తం లేదా భేదం) ఆప్షన్లను పరీక్షించండి.
- హారాల కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజం (క.సా.గు., LCM) తో మొత్తం సమీకరణాన్ని గుణించి భిన్నాలను వెంటనే తొలగించండి.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

✗ "మూడు వరుస సంఖ్యలు: x, x + 1, x + 2, కాబట్టి వర్గాల మొత్తం చిక్కుగా వస్తుంది." ✓ **మధ్య సంఖ్యను** x గా తీసుకోండి: వర్గాల మొత్తం = $\mathbf{3x^2 + 2}$.

✗ "x + 1/x = 26/5 నుంచి x = 5 మాత్రమే." ✓ వ్యుత్క్రమం **1/5** కూడా సరిపోతుంది; ఆప్షన్లలో రెండింటినీ చూడండి.

✗ "5/3 కు బదులు 3/5 తో గుణించారు: తేడా = (5/3 − 3/5) × 32." ✓ తేడా (16/15)x కు సమానం, కాబట్టి x = 32 × 15/16 = **30**.

✗ "మొత్తం 17, లబ్ధం 72: వర్గాల మొత్తం = $17^2 - 72$." ✓ **2P** తీసివేయండి: 289 − 144 = **145**.

✗ "B చెప్పేది 41 − 15 = 26." ✓ ఇద్దరి సంఖ్యల మొత్తం 41 + **1**: B చెప్పేది **27**.

త్వరిత పునశ్చరణ

- ముందు తెలియని రాశికి పేరు పెట్టండి; ఒక షరతు, ఒక సమీకరణం.
- పెద్దది = (S + D)/2; చిన్నది = (S − D)/2.

- $(x - y)^2 = S^2 - 4P$; $x^2 + y^2 = S^2 - 2P$.
- మూడు వరుస సంఖ్యల్లో మధ్యది x; వర్గాల మొత్తం $3x^2 + 2$.
- భిన్నం n/d: రెండు షరతులు, రెండు సమీకరణాలు.
- తప్పు గణన: సరైనది − తప్పు = తేడా.
- మొత్తం : భేదం నిష్పత్తి సంఖ్యలను k యొక్క గుణిజాలుగా ఇస్తుంది.
- రెండు వైపుల లెక్కింపు: ఇద్దరి సంఖ్యల మొత్తం = (చివరి + మొదటి).
- ప్రశ్నలోని ప్రతి షరతులోనూ సమాధానాన్ని సరిచూడండి.

13 వేగ గణితం: గుణకారం, వర్గాలు, శాతాలకు సంక్షిప్త మార్గాలు

ఆప్టిట్యూడ్ అంకగణితంలో ఎక్కువ భాగం కొన్ని నమూనాలే: 5, 25, 125లతో గుణకారాన్ని భాగహారాలుగా, 9లను తీసివేతలుగా, దగ్గరి సంఖ్యలను ఒక ఆధారంగా, శాతాలను భిన్నాలుగా మార్చండి.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **× 5 = × 10 ÷ 2; × 25 = × 100 ÷ 4; × 125 = × 1,000 ÷ 8.**
- **× 9, 99, 999:** N × 999 = N × 1,000 − N.
- **× 11 (రెండు అంకెల ab):** a, (a + b), b అని రాయండి; a + b ≥ 10 అయితే క్యారీ చేయండి: 63 × 11 = 693; 78 × 11 = 7(15)8 = 858.
- **5తో ముగిసే సంఖ్య వర్గం:** $n5^2 = n \times (n + 1)$, తర్వాత 25 రాయండి: $85^2 = 72|25$.
- **పదుల అంకె ఒకటే, ఒకట్ల అంకెల మొత్తం 10:** 64 × 66 = (6 × 7)|(4 × 6) = 4,224.
- **వర్గాల భేదం:** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$: $73 \times 67 = 70^2 - 3^2$.
- **భిన్నం–శాతం పట్టిక:**

భిన్నం	శాతం	భిన్నం	శాతం
1/6	16.67%	1/11	9.09%
1/7	14.29%	1/12	8.33%
1/8	12.5%	1/16	6.25%
1/9	11.11%	3/8	37.5%

- **yలో x% = xలో y%.**

ఉదాహరణ 1. 4,628 × 25 కనుక్కోండి. *సాధన.* 4,62,800 ÷ 4. **సమాధానం: 1,15,700**

ఉదాహరణ 2. 85^2 కనుక్కోండి. *సాధన.* 8 × 9 = 72, తర్వాత 25. **సమాధానం: 7,225**

ఉదాహరణ 3. 78 × 11 కనుక్కోండి. *సాధన.* 7, (7 + 8 = 15), 8: 1ని క్యారీ చేస్తే 858. **సమాధానం: 858**

వివరణ

రకం 1: 9లతో గుణకారం.

ఉదాహరణ 4. 7,346 × 999 కనుక్కోండి. *సాధన.* 73,46,000 − 7,346. **సమాధానం: 73,38,654**

రకం 2: ఆధారానికి దగ్గరి సంఖ్యల వర్గం. $(\text{ఆధారం} \pm d)^2 = \text{ఆధారం}^2 \pm 2 \times \text{ఆధారం} \times d + d^2$. ఆధారం 100 అయితే: $(100 - d)^2$ అంటే (100 − 2d) తర్వాత d^2 ను రెండు అంకెలుగా రాయడం.

ఉదాహరణ 5. (i) 97^2, (ii) 104^2, (iii) 996^2 కనుక్కోండి. *సాధన.* (i) 97 అనేది 100 కంటే 3 తక్కువ: 94|09. (ii) 104 అనేది 4 ఎక్కువ: 108|16. (iii) ఆధారం 1,000, 4 తక్కువ: 992|016. **సమాధానం: (i) 9,409 (ii) 10,816 (iii) 9,92,016**

రకం 3: పదుల అంకె ఒకటే, ఒకట్ల అంకెల మొత్తం 10.

ఉదాహరణ 6. 64 × 66 కనుక్కోండి. *సాధన.* 6 × 7 = 42; 4 × 6 = 24. **సమాధానం: 4,224**

రకం 4: వర్గాల భేదం. రెండు సంఖ్యలు ఒక రౌండ్ సంఖ్యకు ఇరువైపులా సమాన దూరంలో ఉన్నప్పుడు దీన్ని వాడండి.

ఉదాహరణ 7. 73 × 67 కనుక్కోండి. (a) 4,881 (b) 4,891 (c) 4,901 (d) 4,991 *సాధన.* $70^2 - 3^2 = 4{,}900 - 9$. **సమాధానం: (b) 4,891**

రకం 5: శాతాలకు సంక్షిప్త మార్గాలు.

ఉదాహరణ 8. కనుక్కోండి: (i) 450లో 18%, (ii) 968లో 12.5%, (iii) 4,326లో 16⅔%. *సాధన.* (i) తారుమారు చేయండి: 450లో 18% = 180లో 45% = 90 − 9 = 81. (ii) 968లో 1/8 = 121. (iii) 4,326లో 1/6 = 721. **సమాధానం: (i) 81 (ii) 121 (iii) 721**

ఉదాహరణ 9. 4,321 × 125 కనుక్కోండి. *సాధన.* 43,21,000 ÷ 8 = 5,40,125. **సమాధానం: 5,40,125**

ఉదాహరణ 10. 46 × 25 × 4 కనుక్కోండి. *సాధన.* ముందు 25 × 4 = 100 జత చేయండి. **సమాధానం: 4,600**

వేగ చిట్కాలు.

- గుణించే ముందు లబ్ధాన్ని 2 × 5, 4 × 25 లేదా 8 × 125 జతలు వచ్చేలా మార్చి రాయండి.
- లెక్కిస్తూనే భారతీయ పద్ధతిలో కామాలు (లక్షలు, కోట్లు) పెట్టండి; చాలా తప్పులు సున్నాలు తప్పు చోట పడటం వల్లే వస్తాయి.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

✗ "× 25 అంటే × 100 × 4." ✓ అది × 100 **÷ 4**.

✗ "97^2 = 94|9 = 949." ✓ ఆధారం 100కి కుడి భాగంలో రెండు అంకెలు ఉండాలి: 94|**09** = 9,409.

✗ "+20% తర్వాత −20% అయితే ధర మారదు." ✓ నికర మార్పు **−4%**.

✗ "78 × 11 = 7158." ✓ 15 లోని 1ని క్యారీ చేయండి: **858**.

✗ "అంకెల మూలాలు సరిపోలాయి, కాబట్టి లబ్ధం సరైనదే." ✓ **చివరి రెండు అంకెలు** కూడా సరిచూడండి; అంకెలు స్థానం మారిన తప్పులను అంకెల మూలం పట్టుకోదు.

త్వరిత పునశ్చరణ

- × 5: ÷ 2 చేసి ఒక 0 చేర్చండి; × 25: ÷ 4 చేసి 00 చేర్చండి; × 125: ÷ 8 చేసి 000 చేర్చండి.
- $N \times 99\ldots9 = N \times 10^k - N$.
- ab × 11 = a | a + b | b.
- $n5^2 = n(n+1) \mid 25$.
- పదుల అంకె ఒకటే, ఒకట్ల అంకెల మొత్తం 10: a(a + 1) | ఒకట్ల అంకెల లబ్ధం.
- $(100 \pm d)^2 = (100 \pm 2d) \mid d^2$.
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
- 1/6 = 16.67%, 1/7 = 14.29%, 1/8 = 12.5%, 1/12 = 8.33%.
- వరుస మార్పులు: a + b + ab/100.
- లబ్ధాలను అంకెల మూలంతో, చివరి రెండు అంకెలతో సరిచూడండి.

14 స్థాన విలువ, రోమన్ సంఖ్యలు, ఒక పరిధిలో అంకెల లెక్కింపు

ప్రతి అంకెను దాని స్థానాన్ని బట్టి చదవండి, రోమన్ సంఖ్యలను ఏడు గుర్తులు, ఆరు తీసివేత జతలతో రాయండి, అంకెలను సంఖ్య తర్వాత సంఖ్యగా కాకుండా స్థానం వారీగా లేదా బ్లాకుల వారీగా లెక్కించండి.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **భారతీయ పద్ధతి:** ఒకట్లు, పదులు, వందలు, వేలు, పదివేలు, **లక్షలు**, పది లక్షలు, **కోట్లు**, పది కోట్లు. కామాలు: 4,52,46,317.
- **అంతర్జాతీయ పద్ధతి:** వేలు, మిలియన్లు, బిలియన్లు. ప్రతి మూడు అంకెలకు ఒక కామా: 45,246,317.
- **1 లక్ష = 100 వేలు; 10 లక్షలు = 1 మిలియన్; 1 కోటి = 10 మిలియన్లు; 100 కోట్లు = 1 బిలియన్.**
- **స్థాన విలువ (place value)** = అంకె × దాని స్థానం; **సహజ విలువ (face value)** = ఆ అంకెనే. 0 స్థాన విలువ 0.
- **రోమన్ సంఖ్యలు (Roman numerals):** I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1,000.
  - **ఈ తీసివేత జతలు మాత్రమే:** IV (4), IX (9), XL (40), XC (90), CD (400), CM (900).
  - I, X, C, M గరిష్ఠంగా **మూడు** సార్లు పునరావృతం కావచ్చు; **V, L, D ఎప్పుడూ పునరావృతం కావు**, ఎప్పుడూ తీసివేయబడవు.
  - సున్నాకు రోమన్ గుర్తు లేదు.
- **సంఖ్యలు రాయడానికి వాడే అంకెలు:** 1–9కి **9**; 10–99కి **180**; 100–999కి **2,700**. కాబట్టి 1–99కి 189, 1–999కి 2,889.

ఉదాహరణ 1. 3,87,45,612లో 8 స్థాన విలువ. *సాధన.* 8 పది లక్షల స్థానంలో ఉంది: 8 × 10,00,000. **సమాధానం: 80,00,000 (8 మిలియన్లు)**

ఉదాహరణ 2. MCMXCIV ను అంకెల్లో రాయండి. *సాధన.* M = 1,000; CM = 900; XC = 90; IV = 4. **సమాధానం: 1,994**

ఉదాహరణ 3. 1 నుంచి 60 వరకు సంఖ్యలు రాయడానికి ఎన్ని అంకెలు వాడతారు? *సాధన.* 9 ఒక అంకె సంఖ్యలు, తర్వాత 51 రెండు అంకెల సంఖ్యలు (10–60): 9 + 102. **సమాధానం: 111**

వివరణ

రకం 1: పునరావృతమైన అంకెల స్థాన విలువలు.

ఉదాహరణ 4. 4,52,46,317లోని రెండు 4ల స్థాన విలువల మధ్య భేదం. (a) 3,99,60,000 (b) 4,00,00,000 (c) 3,99,96,000 (d) 39,960 *సాధన.* మొదటి 4 కోటి స్థానంలో ఉంది: 4,00,00,000. రెండోది పదివేల స్థానంలో ఉంది: 40,000. భేదం = 3,99,60,000. **సమాధానం: (a) 3,99,60,000**

రకం 2: రెండు పద్ధతుల్లోనూ సంఖ్యల పేర్లు.

ఉదాహరణ 5. "ఏడు కోట్ల నాలుగు లక్షల ముప్పై వేల తొమ్మిది" (seven crore four lakh thirty thousand nine) ని అంకెల్లో రాసి, అంతర్జాతీయ పద్ధతిలో చదవండి. *సాధన.* 7,04,30,009 = 70,430,009, దీన్ని "డెబ్బై మిలియన్ నాలుగు వందల ముప్పై వేల తొమ్మిది" (seventy million four hundred thirty thousand nine) అని చదువుతారు. **సమాధానం: 7,04,30,009**

రకం 3: రోమన్ సంఖ్యలు రాయడం. సంఖ్యను వేలు, వందలు, పదులు, ఒకట్లుగా విడదీసి, ఒక్కో భాగాన్ని రాయండి.

ఉదాహరణ 6. 2,749 ను రోమన్ సంఖ్యల్లో రాయండి. *సాధన.* 2,000 = MM; 700 = DCC; 40 = XL; 9 = IX. **సమాధానం: MMDCCXLIX**

రకం 4: వాడిన అంకెల నుంచి పేజీలు.

ఉదాహరణ 7. ఒక పుస్తకం పేజీలకు పేజీ 1 నుంచి సంఖ్యలు వేయడానికి 1,002 అంకెలు వాడారు. పుస్తకంలో ఎన్ని పేజీలు ఉన్నాయి? *సాధన.* 1–99 పేజీలకు 189 అంకెలు. మిగిలిన 813 అంకెలు 813 ÷ 3 = 271 మూడు అంకెల పేజీలను ఇస్తాయి (100 నుంచి 370). **సమాధానం: 370**

ఉదాహరణ 8. 1 నుంచి 1,000 వరకు రాయడానికి ఎన్ని అంకెలు వాడతారు? *సాధన.* 9 + 180 + 2,700 + 4. **సమాధానం: 2,893**

రకం 5: ఒక అంకెను ఎన్నిసార్లు రాస్తారు. ప్రతి స్థానాన్నీ విడిగా లెక్కించండి.

ఉదాహరణ 9. 1 నుంచి 500 వరకు అంకె 5ను ఎన్నిసార్లు రాస్తారు? కనీసం ఒక 5 ఉన్న సంఖ్యలు ఎన్ని? *సాధన.* ఒకట్ల స్థానం: 5, 15, ..., 495 → 50. పదుల స్థానం: 5 వందల్లో ఒక్కోదానిలో 50–59 → 50. వందల స్థానం: 500 మాత్రమే → 1. మొత్తం 101. 5 ఉన్న సంఖ్యలను లెక్కించడానికి, 5 లేని 0–499 సంఖ్యలను లెక్కించండి: 5 × 9 × 9 = 405. ఇందులో 0 కూడా ఉంది, కాబట్టి 1–499లో 404. అంటే 1–499లో 5 ఉన్నవి 499 − 404 = 95; దానికి 500 కూడా కలపాలి. **సమాధానం: 101 సార్లు; 96 సంఖ్యలు**

రకం 6: పూరక లెక్కింపు. "కనీసం ఒకటి ఉన్నవి" = మొత్తం − "ఒక్కటీ లేనివి".

ఉదాహరణ 10. 1 నుంచి 400 వరకు ఉన్న సంఖ్యల్లో అంకె 4 కనీసం ఒకసారి ఉన్నవి ఎన్ని? *సాధన.* 0 నుంచి 399 వరకు 4 లేని సంఖ్యలు: వందల స్థానంలో 0–3 (4 ఎంపికలు) × 9 × 9 = 324. ఇందులో 0 కూడా ఉంది, కాబట్టి 1–399లో 323. 400లో 4 ఉంది. కాబట్టి 1–400లో 4 ఉన్నవి 400 − 323 = 77. **సమాధానం: 77**

వేగ చిట్కాలు.

- "అంకెను ఎన్నిసార్లు రాస్తారు" అంటే 55ను రెండుసార్లు లెక్కిస్తాం; "ఆ అంకె ఉన్న సంఖ్యలు ఎన్ని" అంటే 55ను ఒకసారే లెక్కిస్తాం.
- పేజీ సమస్యల్లో 3తో భాగించే ముందు 189 (1–99 పేజీలు) తీసివేయండి.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

✗ "1 మిలియన్ = 1 కోటి." ✓ **1 మిలియన్ = 10 లక్షలు**; 1 కోటి = 10 మిలియన్లు.

✗ "1,999 = MIM." ✓ ఆరు జతల్లో మాత్రమే తీసివేయండి: **MCMXCIX**.

✗ "4 = IIII, 40 = XXXX." ✓ ఏ గుర్తూ నాలుగుసార్లు పునరావృతం కాదు: **IV**, **XL**.

✗ "1,002 అంకెలు ÷ 3 = 334 పేజీలు." ✓ 1–99 పేజీలకు 189 అంకెలే వాడతారు: **370** పేజీలు.

✗ "1 నుంచి 500 వరకు అంకె 5ను 96 సార్లు రాస్తారు." ✓ 96 అనేది 5 **ఉన్న సంఖ్యల** లెక్క; అంకెను **101** సార్లు రాస్తారు.

✗ "1 నుంచి 399 వరకు 4 లేని సంఖ్యలు = 4 × 9 × 9 = 324." ✓ ఇది 0ను కూడా లెక్కిస్తుంది: **323**.

త్వరిత పునశ్చరణ

- 1 లక్ష = 100,000; 10 లక్షలు = 1 మిలియన్; 1 కోటి = 10 మిలియన్లు; 100 కోట్లు = 1 బిలియన్.
- స్థాన విలువ = అంకె × స్థానం; సహజ విలువ = అంకె.
- రోమన్: I 1, V 5, X 10, L 50, C 100, D 500, M 1,000.
- తీసివేత జతలు: IV, IX, XL, XC, CD, CM మాత్రమే.
- V, L, D ఎప్పుడూ పునరావృతం కావు; I, X, C, M గరిష్ఠంగా మూడుసార్లు.
- అంకెలు: 9 (1–9), 180 (10–99), 2,700 (100–999).

- అంకెల నుంచి పేజీలు: (అంకెలు − 189)/3 + 99.
- ఒక అంకెను స్థానం వారీగా లెక్కించండి; అది ఉన్న సంఖ్యలను పూరక పద్ధతిలో.
- అంకెల మొత్తం 1–99 = 900; 1–999 = 13,500.