

కేంద్రీయ స్థాన మాపనాలు

Measures of central tendency

ఉచిత నోట్స్ PDF · 2 నోట్స్ · 25 Oct 2026

Medha AI ఉచిత స్టడీ మెటీరియల్. మీ పరీక్షకు నోట్స్, ప్రాక్టీస్, మాక్ టెస్టులు, పాత పేపర్ల కోసం **app.medhaai.in** లో ఉచితంగా మొదలుపెట్టండి.

1. అంకగణిత, భారిత, గుణ, హార్మోనిక్ సగటులు, వాటి మధ్య సంబంధం
2. ముడి, సమూహ డేటాకు మధ్యగతం, బాహుళకం, విభాగ విలువలు (చతుర్థాంశాలు, దశాంశకాలు, శతాంశకాలు)

1 అంకగణిత, భారిత, గుణ, హార్మోనిక్ సగటులు, వాటి మధ్య సంబంధం

అంకగణిత సగటు మొత్తాన్ని అందరికీ సమానంగా పంచుతుంది, గుణ మధ్యమం నిష్పత్తులు, వృద్ధి రేట్లకు సగటు ఇస్తుంది, హార్మోనిక్ సగటు వేగం వంటి రేట్లకు సగటు ఇస్తుంది; ధన విలువలకు ఎల్లప్పుడూ $AM \geq GM \geq HM$.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **అంకగణిత సగటు (arithmetic mean, AM), గుర్తు $\bar{x}$:**
 - వ్యక్తిగత శ్రేణి (individual series): $\bar{x} = \Sigma x \div n$;
 - విచ్ఛిన్న శ్రేణి (discrete series): $\bar{x} = \Sigma fx \div N$, $N = \Sigma f$;
 - అవిచ్ఛిన్న శ్రేణి (continuous series): x = తరగతి మధ్య విలువ (mid-value), సూత్రం అదే;
 - సంక్షిప్త పద్ధతి (ఊహించిన సగటు (assumed mean) A , $d = x - A$): $\bar{x} = A + \Sigma fd \div N$;
 - స్టెప విచలనం (step deviation) ($d' = (x - A)/h$): $\bar{x} = A + (\Sigma fd' \div N) \times h$.
- **AM లక్షణాలు:**
 - $\Sigma(x - \bar{x}) = 0$: సగటు నుంచి విచలనాల (deviations) మొత్తం సున్నా;
 - $A = \bar{x}$ అయినప్పుడు $\Sigma(x - A)^2$ కనిష్ఠం;
 - **సంయుక్త సగటు (combined mean)** $\bar{x}_{12} = (n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2) \div (n_1 + n_2)$;
 - మూల బిందువు, స్కేలు మార్పు (change of origin and scale): $u = (x - A)/h$ అయితే $\bar{x} = A + h \bar{u}$.
- **భారిత సగటు (weighted mean):** $\bar{x}_w = \Sigma wx \div \Sigma w$. అన్ని భారాలు సమానమైతే ఇది సాధారణ AM కు సమానం.
- **గుణ మధ్యమం (geometric mean, GM):** n విలువల లబ్ధానికి n -వ మూలం.
 - $GM = (x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n)^{(1/n)}$;
 - సంవర్గమానాల (logarithms) ద్వారా: $GM = \text{antilog}(\Sigma \log x \div n)$; సమూహ డేటాకు: $\text{antilog}(\Sigma f \log x \div N)$;
 - భారిత: $\text{antilog}(\Sigma w \log x \div \Sigma w)$.
- **హార్మోనిక్ సగటు (harmonic mean, HM):** వ్యుత్క్రమాల (reciprocals) AM కు వ్యుత్క్రమం.
 - $HM = n \div \Sigma(1/x)$; సమూహ డేటాకు: $HM = N \div \Sigma(f/x)$.
- **సంబంధం:** ధన విలువలకు $AM \geq GM \geq HM$; అన్ని విలువలు ఒకటే అయినప్పుడు మాత్రమే మూడూ సమానం.
- **రెండు ధన సంఖ్యలు a, b :** $AM = (a + b)/2$, $GM = \sqrt{ab}$, $HM = 2ab/(a + b)$, మరియు $GM^2 = AM \times HM$.
- **ఉపయోగాలు:** సాధారణ సగటులకు AM; సగటు వృద్ధి రేట్లు (growth rates), నిష్పత్తులు, శాతాలు, సూచిక సంఖ్యల (index numbers) కు GM; సమాన దూరాలపై సగటు వేగం, సమాన మొత్తంలో డబ్బు ఖర్చు చేసినప్పుడు సగటు ధరకు HM.
- ఏదైనా విలువ సున్నా అయితే GM, HM వాడలేం; రుణ విలువలతో GM వాడరు.

ఉదాహరణ 1. 12, 18, 25, 30, 15 ల AM కనుగొనండి. సాధన. $\Sigma x = 100$, $n = 5$. **సమాధానం: 20**

ఉదాహరణ 2. 4, 9, 6 ల GM కనుగొనండి. సాధన. లబ్ధం = 216; 216 యొక్క ఘనమూలం. **సమాధానం: 6**

ఉదాహరణ 3. 2, 3, 6 ల HM కనుగొనండి. సాధన. $\Sigma(1/x) = 1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$. $HM = 3 \div 1$. **సమాధానం: 3**

వివరణ

1. సోపాన విచలన పద్ధతిలో అవిచ్ఛిన్న శ్రేణి AM. d' చిన్న పూర్ణ సంఖ్యలు అయ్యేలా A ను మధ్యలో ఉన్న మధ్య విలువగా, h ను తరగతి అంతరంగా (class interval) తీసుకోండి.

ఉదాహరణ 4. సగటు కనుగొనండి.

తరగతి	మధ్య విలువ x	f	$d' = (x - 25)/10$
0-10	5	6	-2
10-20	15	10	-1
20-30	25	14	0
30-40	35	12	1
40-50	45	8	2

సాధన. $fd' = -12, -10, 0, 12, 16$, కాబట్టి $\sum fd' = 6$, $N = 50$. $\bar{x} = 25 + (6 \div 50) \times 10 = 25 + 1.2$. **సమాధానం: 26.2** (ప్రత్యక్ష పద్ధతి: $\sum fx = 1,310$; $1,310 \div 50 = 26.2$.)

2. భారిత సగటు. అంశాలు సమాన ప్రాముఖ్యం లేనివి అయినప్పుడు (వేర్వేరు క్రెడిట్స్ గల సబ్జెక్టులు, సూచికలోని సరుకులు) దీనిని వాడండి.

ఉదాహరణ 5. ఒక విద్యార్థి మూడు పేపర్లలో 60, 75, 80 మార్కులు పొందాడు; వాటి భారాలు 2, 3, 5. భారిత సగటు కనుగొనండి. సాధన. $\sum wx = 120 + 225 + 400 = 745$; $\sum w = 10$. **సమాధానం: 74.5** (సాధారణ సగటు 71.67 అవుతుంది).

3. సంయుక్త సగటు.

ఉదాహరణ 6. సెక్షన్ Aలో 40 మంది విద్యార్థులు, సగటు 52; సెక్షన్ Bలో 60 మంది, సగటు 47. మొత్తం 100 మంది సగటు కనుగొనండి. సాధన. $(40 \times 52 + 60 \times 47) \div 100 = (2,080 + 2,820) \div 100$. **సమాధానం: 49**

4. సవరించిన సగటు. మొత్తాన్ని సరిచేసి, మళ్ళీ భాగించండి.

ఉదాహరణ 7. 50 పరిశీలనల (observations) సగటు 36. తర్వాత 43 ను పొరపాటున 34 గా రాశారని తెలిసింది. సరైన సగటు కనుగొనండి. సాధన. తప్పు మొత్తం 1,800. సరైన మొత్తం = $1,800 - 34 + 43 = 1,809$. $1,809 \div 50$. **సమాధానం: 36.18**

5. సగటు వృద్ధికి GM. వృద్ధి రేట్లు గుణకారంగా పెరుగుతాయి, కాబట్టి వాటి సగటు అంటే రేట్ల AM కాదు, వృద్ధి కారకాల $(1 + r)$ GM.

ఉదాహరణ 8. వరుసగా మూడు సంవత్సరాల్లో ఉత్పత్తి 8%, 12%, 25% పెరిగింది. సగటు వార్షిక వృద్ధి రేటు కనుగొనండి. సాధన. కారకాలు 1.08, 1.12, 1.25; లబ్ధం = 1.512. $GM = 1.512^{(1/3)} = 1.1478$ (సంవర్ధమాన మార్గం: $\sum \log = 0.17955$, $\div 3 = 0.05985$, $\text{antilog} = 1.1478$). **సమాధానం: సంవత్సరానికి సుమారు 14.78%** (రేట్ల AM, 15%, దీనిని ఎక్కువగా చూపుతుంది).

6. సగటు వేగానికి HM.

ఉదాహరణ 9. ఒక కారు A నుంచి Bకి 60 కి.మీ./గం. వేగంతో వెళ్లి, 40 కి.మీ./గం. వేగంతో తిరిగి వస్తుంది. రెండు వైపుల ప్రయాణానికి సగటు వేగం కనుగొనండి. సాధన. దూరాలు సమానం, కాబట్టి HM వాడండి: $2 \div (1/60 + 1/40) = 2 \div (5/120)$. **సమాధానం: 48 కి.మీ./గం.** (50 కాదు).

ఉదాహరణ 10. ఒక కొనుగోలుదారు కి.గ్రా. ₹4 చొప్పున బియ్యంపై ₹100, కి.గ్రా. ₹5 చొప్పున మరో ₹100 ఖర్చు చేస్తాడు. కి.గ్రా.కు సగటు ధర కనుగొనండి. సాధన. ఖర్చు చేసిన డబ్బు సమానం, కాబట్టి HM: $2 \div (1/4 + 1/5) = 40/9$. **సమాధానం: కి.గ్రా.కు సుమారు ₹4.44** (₹200కు $25 + 20 = 45$ కి.గ్రా. వస్తుంది).

7. మూడు సగటులు పక్కపక్కనే.

ఉదాహరణ 11. 2, 3, 6 లకు: $AM = 11/3 = 3.67$, $GM = 36^{(1/3)} = 3.30$, $HM = 3$. అసమాన ధన విలువలకు ఉండాల్సినట్లే $AM > GM > HM$ క్రమం నిలుస్తుంది.

సగటు	దేనికి ఉత్తమం	ఎక్కువ ప్రాధాన్యం దేనికి	ఎప్పుడు విఫలం
AM	సమానంగా పంచే సాధారణ మొత్తాలు	పెద్ద విలువలు	తీవ్ర విలువలు దీనిని వక్రీకరిస్తాయి
GM	నిష్పత్తులు, వృద్ధి రేట్లు, సూచిక సంఖ్యలు	పెద్ద విలువలకు, AM కంటే తక్కువగా	ఏదైనా విలువ సున్నా లేదా రుణం
HM	వేగాలు, ఒక్కో యూనిట్ కు రేట్లు (సమాన మొత్తాలు)	చిన్న విలువలు	ఏదైనా విలువ సున్నా

లోతైన విశ్లేషణ

1. $AM \geq GM \geq HM$ ఎందుకు (రెండు సంఖ్యలు). $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ నుంచి $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, కాబట్టి $AM \geq GM$. $HM = GM^2 \div AM$, $AM \geq GM$ కాబట్టి $HM \leq GM$. $a = b$ అయినప్పుడు మాత్రమే సమానత్వం.

ఉదాహరణ 12. రెండు సంఖ్యల AM 25, HM 16. GM, ఆ సంఖ్యలు కనుగొనండి. సాధన. $GM = \sqrt{(25 \times 16)} = 20$. కాబట్టి $a + b = 50$, $ab = 400$; సంఖ్యలు 40, 10 (సరిచూడండి: $HM = 2 \times 400 \div 50 = 16$). **సమాధానం: GM 20; సంఖ్యలు 40, 10**

2. సమూహ డేటాకు GM, HM.

ఉదాహరణ 13. AM, GM, HM కనుగొనండి.

x	5	10	20	40
f	2	3	3	2

సాధన. $N = 10$.

- $AM = (10 + 30 + 60 + 80) \div 10 = 18$.
- $\log x = 0.6990, 1.0000, 1.3010, 1.6021$; $\Sigma f \log x = 11.5051$; $\div 10 = 1.15051$; antilog = **14.14** (సరిగ్గా $\sqrt{200}$).
- $\Sigma(f/x) = 0.4 + 0.3 + 0.15 + 0.05 = 0.9$; $HM = 10 \div 0.9 = 11.11$.

సమాధానం: AM 18, GM 14.14, HM 11.11

3. భారిత HM (అసమాన మొత్తాలు). వేర్వేరు మొత్తాలు ఖర్చు చేసినప్పుడు లేదా దూరాలు వేరైనప్పుడు, ప్రతి రేటుకు ఆ మొత్తం లేదా దూరాన్ని భారంగా ఇవ్వండి.

ఉదాహరణ 14. ఒక సరుకుపై కి.గ్రా. ₹4 చొప్పున ₹100, కి.గ్రా. ₹5 చొప్పున ₹200 ఖర్చు చేశారు. సగటు ధర కనుగొనండి. సాధన. ₹300కు పరిమాణం = $25 + 40 = 65$ కి.గ్రా. భారిత HM = $300 \div (100/4 + 200/5)$. **సమాధానం: కి.గ్రా.కు సుమారు ₹4.62**

ఉదాహరణ 15. ఒక సైక్లిస్టు 30 కి.మీ. దూరం 30 కి.మీ./గం. వేగంతో, తర్వాత 90 కి.మీ. దూరం 45 కి.మీ./గం. వేగంతో ప్రయాణిస్తాడు. సగటు వేగం కనుగొనండి. సాధన. 120 కి.మీ.కు సమయం = 1 గం. + 2 గం. = 3 గం. **సమాధానం: 40 కి.మీ./గం.**

4. లోపించిన పానఃపున్యం.

ఉదాహరణ 16. ఈ పంపిణీ సగటు 25. p కనుగొనండి.

x	10	20	30	40
f	5	p	10	5

సాధన. $(50 + 20p + 300 + 200) \div (20 + p) = 25$ నుంచి $550 + 20p = 500 + 25p$, కాబట్టి $p = 10$. **సమాధానం: 10**

5. GM ఉపయోగకర లక్షణాలు.

- $\log GM =$ సంవర్గమానాల సగటు, కాబట్టి గుణకారంతో పెరిగే డేటాకు GM సరిపోతుంది.
- రెండు శ్రేణుల నిష్పత్తుల GM = వాటి GMల నిష్పత్తి; అందుకే GM సూచిక **టైమ్ రివర్సల్ పరీక్ష (time reversal test)**ను సంతృప్తిపరుస్తుంది (సూచిక సంఖ్యలు చూడండి).
- ప్రతి విలువను k తో గుణిస్తే AM, GM, HM కూడా k రెట్లు అవుతాయి; k కలిపితే AM k మేరకు మారుతుంది, కానీ GM, HM k మేరకు మారవు.

6. AM గుణాలు, పరిమితులు (పాఠ్యపుస్తక జాబితా). కచ్చితంగా నిర్వచించబడింది, అన్ని అంశాలపై ఆధారపడుతుంది, బీజగణిత ప్రక్రియలకు అనువైనది, ప్రతిచయన (sampling) హెచ్చుతగ్గులకు అతి తక్కువగా ప్రభావితమవుతుంది; కానీ తీవ్ర విలువలు దీనిని వక్రీకరిస్తాయి, ఊహలు లేకుండా ఓపెన్ ఎండ్ తరగతులకు (open-end classes) కనుగొనలేం, పరిశీలన ద్వారా గానీ గ్రాఫ్ ద్వారా గానీ గుర్తించలేం.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

X "సగటు వృద్ధి రేటు = వార్షిక రేట్ల AM." ✓ **కారకాల $(1 + r)$ GM** వాడి, తర్వాత 1 తీసివేయండి.

X "సమాన దూరాలపై సగటు వేగం = $(60 + 40)/2 = 50$." ✓ **HM** వాడండి: **48 కి.మీ./గం.**

X " $HM \geq GM \geq AM$." ✓ ధన విలువలకు **$AM \geq GM \geq HM$** .

X " $GM^2 = AM + HM$." ✓ రెండు సంఖ్యలకు **$GM^2 = AM \times HM$** .

X " $\Sigma(x - \bar{x})^2$ సున్నా." ✓ **$\Sigma(x - \bar{x}) = 0$** ; $\Sigma(x - \bar{x})^2$ వర్గాల **కనిష్ట** మొత్తం.

X "సోపాన విచలనంలో $\bar{x} = A + \Sigma fd' \div N$." ✓ తరగతి అంతరంతో గుణించండి: **$\bar{x} = A + (\Sigma fd' \div N) \times h$** .

X "సంయుక్త సగటు = రెండు సగటుల సగటు." ✓ పరిమాణాలతో భారం ఇవ్వండి: **$(n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2) \div (n_1 + n_2)$** .

త్వరిత పునశ్చరణ

- $AM = \Sigma fx \div N$; సోపాన విచలనం $A + (\Sigma fd' / N) \times h$.
- $\Sigma(x - \bar{x}) = 0$; $A = \bar{x}$ వద్ద $\Sigma(x - A)^2$ కనిష్టం.
- భారిత AM = $\Sigma wx \div \Sigma w$; సంయుక్త సగటు n తో భారం ఇస్తుంది.
- $GM = (\text{లబ్ధం})^{(1/n)} = \text{antilog } (\Sigma f \log x \div N)$.
- $HM = N \div \Sigma(f/x)$.
- $AM \geq GM \geq HM$; అన్ని విలువలు సమానమైతేనే సమానం.
- రెండు సంఖ్యలు: $GM^2 = AM \times HM$.
- GM: వృద్ధి రేట్లు, నిష్పత్తులు, సూచిక సంఖ్యలు.
- HM: సమాన దూరాలపై వేగాలు, సమాన ఖర్చుతో ధరలు.
- సున్నా విలువ: GM గానీ HM గానీ లేవు.

2 ముడి, సమూహ డేటాకు మధ్యగతం, బాహుళకం, విభాగ విలువలు (చతుర్థాంశాలు, దశాంశకాలు, శతాంశకాలు)

మధ్యగతం క్రమంలో అమర్చిన డేటాను రెండు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తుంది, చతుర్థాంశాలు, దశాంశకాలు, శతాంశకాలు దానిని 4, 10, 100 సమాన భాగాలుగా విభజిస్తాయి, బాహుళకం అత్యధికంగా వచ్చే విలువ; సమూహ డేటాకు ప్రతిదానిని దాని తరగతిలో అంతర్వేశనం (interpolation) ద్వారా కనుగొంటారు.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- మధ్యగతం (median), చతుర్థాంశాలు (quartiles), దశాంశకాలు (deciles), శతాంశకాలు (percentiles) స్థాన సగటులు (positional averages) (విభాగ విలువలు (partition values)); ముందుగా డేటాను (data) క్రమంలో అమర్చాలి.
- విభజన బిందువుల సంఖ్య: చతుర్థాంశాలు 3 (Q_1, Q_2, Q_3), దశాంశకాలు 9, శతాంశకాలు 99.
- సమానతలు: మధ్యగతం = $Q_2 = D_5 = P_{50}$; $Q_1 = P_{25}$; $Q_3 = P_{75}$; $D_1 = P_{10}$.
- వ్యక్తిగత, విచ్ఛిన్న శ్రేణులు (discrete series) (పార్యపుస్తక పద్ధతి):
 - మధ్యగతం = $((N + 1)/2)$ వ అంశం పరిమాణం;
 - $Q_1 = ((N + 1)/4)$ వ అంశం, $Q_3 = (3(N + 1)/4)$ వ అంశం;
 - $D_i = (i(N + 1)/10)$ వ అంశం, $P_i = (i(N + 1)/100)$ వ అంశం;
 - విచ్ఛిన్న శ్రేణిలో, స్థానానికి సమానమైన లేదా దానిని మించిన మొదటి సంచిత పౌనఃపున్యం (cumulative frequency, cf) ను కనుగొనండి.
- అవిచ్ఛిన్న శ్రేణి (continuous series) (+1 లేకుండా $N/2, N/4 \dots$ వాడండి):
 - మధ్యగతం = $l + [(N/2 - c) \div f] \times h$;
 - $Q_1 = l + [(N/4 - c) \div f] \times h$, $Q_3 = l + [(3N/4 - c) \div f] \times h$;
 - $D_i = l + [(iN/10 - c) \div f] \times h$, $P_i = l + [(iN/100 - c) \div f] \times h$;
 - l = ఆ విలువ ఉన్న తరగతి దిగువ పరిమితి, c = దానికి ముందు తరగతి cf, f = దాని పౌనఃపున్యం (frequency), h = తరగతి అంతరం (class interval).
- బాహుళకం (mode, Z): అత్యధిక పౌనఃపున్యం గల విలువ.
 - అవిచ్ఛిన్న శ్రేణి: $Z = l + [(f_1 - f_0) \div (2f_1 - f_0 - f_2)] \times h$, దీనినే $l + [\Delta_1 \div (\Delta_1 + \Delta_2)] \times h$ అని కూడా రాస్తారు, $\Delta_1 = f_1 - f_0$, $\Delta_2 = f_1 - f_2$;
 - f_1 = బాహుళక తరగతి పౌనఃపున్యం, f_0 = ముందు తరగతి, f_2 = తర్వాత తరగతి.
- అనుభావిక సంబంధం (empirical relation) (కార్ల్ పియర్సన్), మితమైన వక్రత (skewness) గల డేటాకు: బాహుళకం = 3 మధ్యగతం - 2 సగటు.
- గ్రాఫ్‌లు: కంటే తక్కువ, కంటే ఎక్కువ ఒగివ్‌లు (ogives) ఖండించుకునే x-విలువే మధ్యగతం (లేదా $N/2$ కంటే తక్కువ ఒగివ్‌ను కలిసే చోటు); బాహుళకాన్ని హిస్టోగ్రామ్ (histogram) నుంచి గుర్తిస్తారు.
- ఓపెన్ ఎండ్ తరగతులకు (open-end classes) మధ్యగతం, బాహుళకం కనుగొనవచ్చు; ఊహలు లేకుండా సగటును కనుగొనలేం.
- A = మధ్యగతం అయినప్పుడు $\Sigma|x - A|$ కనిష్టం.

ఉదాహరణ 1. 15, 22, 8, 30, 19, 27, 11 ల మధ్యగతం కనుగొనండి. సాధన. క్రమంలో: 8, 11, 15, 19, 22, 27, 30. $N = 7$, 4వ అంశం. సమాధానం: 19

ఉదాహరణ 2. 5, 12, 7, 20, 15, 9 ల మధ్యగతం కనుగొనండి. సాధన. క్రమంలో: 5, 7, 9, 12, 15, 20. 3.5వ అంశం: $(9 + 12)/2$. సమాధానం: **10.5**

వివరణ

1. ముడి డేటా (raw data) చతుర్థాంశాలు.

ఉదాహరణ 3. 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 22 లకు Q_1 , మధ్యగతం, Q_3 కనుగొనండి. సాధన. $N = 11$ (ఇప్పటికే క్రమంలో ఉంది). $Q_1 = (12/4)వ = 3వ$ అంశం; మధ్యగతం = 6వ అంశం; $Q_3 = (36/4)వ = 9వ$ అంశం. సమాధానం: $Q_1 = 7$, మధ్యగతం = **12**, $Q_3 = 18$

2. విచ్ఛిన్న శ్రేణి.

ఉదాహరణ 4. మధ్యగతం, Q_1 , Q_3 , బాహుళకం కనుగొనండి.

x	10	20	30	40	50
f	4	7	12	9	8
cf	4	11	23	32	40

సాధన. $N = 40$.

- మధ్యగతం: $(41/2) = 20.5వ$ అంశం; 20.5 కు సమానమైన లేదా మించిన మొదటి cf 23 → **30**.
- Q_1 : $(41/4) = 10.25వ$ అంశం; 10.25 కు సమానమైన లేదా మించిన మొదటి cf 11 → **20**.
- Q_3 : $3 \times 41/4 = 30.75వ$ అంశం; 30.75 కు సమానమైన లేదా మించిన మొదటి cf 32 → **40**.
- బాహుళకం: అత్యధిక పొడవున 12 → **30**.

3. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణి: ఒకే పట్టిక, అన్ని కొలతలు.

ఉదాహరణ 5.

తరగతి	f	cf
0-10	5	5
10-20	8	13
20-30	15	28
30-40	20	48
40-50	12	60
50-60	10	70

$N = 70$ (ఈ పట్టిక సగటు 33).

కొలత	స్థానం	తరగతి (l, c, f)	విలువ
మధ్యగతం	$N/2 = 35$	30-40 (30, 28, 20)	$30 + (7/20) \times 10 = \mathbf{33.5}$
Q_1	$N/4 = 17.5$	20-30 (20, 13, 15)	$20 + (4.5/15) \times 10 = \mathbf{23}$
Q_3	$3N/4 = 52.5$	40-50 (40, 48, 12)	$40 + (4.5/12) \times 10 = \mathbf{43.75}$

కొలత	స్థానం	తరగతి (l, c, f)	విలువ
D ₇	7N/10 = 49	40-50 (40, 48, 12)	$40 + (1/12) \times 10 = \mathbf{40.83}$
P ₉₀	90N/100 = 63	50-60 (50, 60, 10)	$50 + (3/10) \times 10 = \mathbf{53}$

బాహుళకం: బాహుళక తరగతి 30-40 ($f_1 = 20, f_0 = 15, f_2 = 12$). $Z = 30 + [5 \div (40 - 27)] \times 10 = 30 + 3.85$. **సమాధానం:** సుమారు **33.85** సరిచూడండి: $3 \times 33.5 - 2 \times 33 = 34.5$, ఇది 33.85 కు దగ్గరగా ఉంది; దాదాపు సౌష్ఠవ డేటాకు ఇది ఊహించినదే.

4. అనుభావిక సంబంధం.

ఉదాహరణ 6. మితమైన వక్రత గల పంపిణీలో సగటు 52, బాహుళకం 46. మధ్యగతం కనుగొనండి. సాధన. మధ్యగతం = $(2 \text{ సగటు} + \text{బాహుళకం}) \div 3 = (104 + 46) \div 3$. **సమాధానం: 50**

5. బాహుళక తరగతి మొదటి తరగతి అయినప్పుడు బాహుళకం. దానికి ముందు లేని తరగతి పొనాపున్నాన్ని 0 గా తీసుకోండి.

ఉదాహరణ 7. తరగతులు 0-20, 20-40, 40-60, పొనాపున్నాలు 30, 20, 10. బాహుళకం కనుగొనండి. సాధన. $f_1 = 30, f_0 = 0, f_2 = 20$. $Z = 0 + [30 \div (60 - 0 - 20)] \times 20$. **సమాధానం: 15**

లక్షణం	మధ్యగతం	బాహుళకం
రకం	స్థాన సగటు	అత్యధికంగా వచ్చే విలువ
ఓపెన్ ఎండ్ తరగతులు	కనుగొనవచ్చు	కనుగొనవచ్చు
దేనికి ఉత్తమం	వక్రత గల డేటా (ఆదాయాలు, వేతనాలు)	సాధారణంగా ఎక్కువగా ఉండే పరిమాణం, ఫ్యాషన్, గుణాత్మక డేటా
బలహీనత	తీవ్ర అంశాల పరిమాణాన్ని పట్టించుకోదు	అస్పష్టంగా లేదా ద్విబాహుళకంగా ఉండవచ్చు

లోతైన విశ్లేషణ

1. కలుపుకొనే తరగతులు (inclusive classes). ఏ సూత్రం వాడే ముందైనా వాటిని మినహాయించే (exclusive) వాస్తవ తరగతి పరిమితులుగా (class limits) మార్చండి: దిగువ పరిమితుల నుంచి అంతరంలో సగం (ఇక్కడ 0.5) తీసివేసి, ఎగువ పరిమితులకు కలపండి.

ఉదాహరణ 8. మధ్యగతం, బాహుళకం కనుగొనండి.

తరగతి	10-19	20-29	30-39	40-49
f	6	14	10	5

సాధన. వాస్తవ తరగతులు 9.5-19.5, 19.5-29.5, ... $N = 35, N/2 = 17.5$, మధ్యగత తరగతి 19.5-29.5 ($c = 6, f = 14$).

- మధ్యగతం = $19.5 + (11.5/14) \times 10 = \mathbf{27.71}$.
- బాహుళకం = $19.5 + [8 \div (28 - 6 - 10)] \times 10 = \mathbf{26.17}$.

l గా 19.5 కు బదులు 20 వాడడం తరచూ జరిగే పొరపాటు, దానివల్ల సమాధానం తప్పు వస్తుంది.

2. ఇచ్చిన మధ్యగతం నుంచి లోపించిన పొనాపున్యం.

ఉదాహరణ 9. ఈ పంపిణీ మధ్యగతం 27. p కనుగొనండి.

తరగతి	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
f	5	p	20	15	5

సాధన. $N = 45 + p$. మధ్యగతం 27, 20–30 లో ఉంది, కాబట్టి $c = 5 + p$, $f = 20$. $27 = 20 + [((45 + p)/2 - (5 + p)) \div 20] \times 10$
 నుంచి $14 = (35 - p)/2$, కాబట్టి $p = 7$ ($N = 52$; సరిచూడండి: $20 + (26 - 12)/20 \times 10 = 27$). **సమాధానం: 7**

3. అస్పష్ట బాహుళకం. రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ విలువలకు అత్యధిక పౌనఃపున్యం ఒకటే అయినప్పుడు, లేదా అత్యధిక పౌనఃపున్యం చివరల దగ్గర ఉన్నప్పుడు, బాహుళకాన్ని **సమూహన పద్ధతి (grouping method)** ద్వారా గుర్తిస్తారు (పౌనఃపున్యాలను రెండేసి, మూడేసి కలుపుతారు; సమూహన పద్ధతిలో ఎక్కువసార్లు వచ్చే విలువే బాహుళకం); అదీ కుదరకపోతే అనుభావిక సంబంధం ద్వారా కనుగొంటారు.

4. అసమాన తరగతి అంతరాలు. బాహుళక సూత్రం వాడే ముందు, పౌనఃపున్యాలను ఒకే అంతరానికి సర్దుబాటు చేయండి (పౌనఃపున్య సాంద్రత), ఎందుకంటే వెడల్పైన తరగతి కేవలం వెడల్పుగా ఉన్నందుకే ఎక్కువ అంశాలను సేకరిస్తుంది.

5. గ్రాఫ్ ద్వారా గుర్తించడం.

- కంటే తక్కువ ఒగివ్: ఎగువ పరిమితులకు ఎదురుగా cf ని గుర్తించండి; మధ్యగతానికి $N/2$ ఎత్తు వద్ద, Q_1 కు $N/4$ వద్ద, Q_3 కు $3N/4$ వద్ద x-విలువను చదవండి.
- రెండు ఒగివ్లు మధ్యగతం వద్ద ఖండించుకుంటాయి.
- హిస్టోగ్రామ్: బాహుళక దీర్ఘచతురస్రం పై కుడి మూలను దాని ముందు దీర్ఘచతురస్రం పై కుడి మూలతో, బాహుళక దీర్ఘచతురస్రం పై ఎడమ మూలను దాని తర్వాతి దీర్ఘచతురస్రం పై ఎడమ మూలతో కలపండి; ఈ రేఖలు ఖండించుకునే చోటు నుంచి x-అక్షం మీదకు లంబం గీయండి; దాని పాదమే బాహుళకం.

6. విభాగ విలువల ఉపయోగాలు. చతుర్థాంశాల నుంచి **చతుర్థాంశ విచలనం (quartile deviation)** $(Q_3 - Q_1)/2$, **బౌలీ వక్రతా ప్రమాణం (Bowley's measure of skewness)** వస్తాయి; పోటీ పరీక్షల ర్యాంకులకు, వృద్ధి చార్టులకు శతాంశాలు వాడతారు (90వ శతాంశం అంటే 90% మంది ఆ విలువ లేదా అంతకంటే తక్కువ స్కోరు చేశారు).

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

X "15, 22, 8, 30, 19 ల మధ్యగతం 8, రాసిన క్రమంలో మధ్యలో ఉన్న విలువ." ✓ **ముందుగా క్రమంలో అమర్చండి:** మధ్యగతం **19**.

X "సమూహ మధ్యగత సూత్రంలో c అంటే మధ్యగత తరగతి cf." ✓ c అంటే దానికి **ముందు** తరగతి cf.

X "బాహుళకం = 3 సగటు - 2 మధ్యగతం." ✓ **బాహుళకం = 3 మధ్యగతం - 2 సగటు.**

X "4 చతుర్థాంశాలు, 10 దశాంశాలు ఉంటాయి." ✓ **3 చతుర్థాంశాలు, 9 దశాంశాలు, 99 శతాంశాలు.**

X "అవిచ్ఛిన్న శ్రేణిలో మధ్యగత తరగతిని $(N + 1)/2$ వద్ద కనుగొంటారు." ✓ అవిచ్ఛిన్న శ్రేణికి **$N/2$** వాడండి.

X "కలుపుకొనే తరగతి 20–29 కి $I = 20$." ✓ వాస్తవ పరిమితి **19.5** వాడండి.

X "కంటే తక్కువ ఒగివ్ x-అక్షాన్ని కలిపే చోట మధ్యగతం ఉంటుంది." ✓ **రెండు ఒగివ్లు ఖండించుకునే చోట** ఉంటుంది.

త్వరిత పునశ్చరణ

- ముందుగా డేటాను క్రమంలో అమర్చండి: స్థాన సగటులు.
- ముడి/విచ్ఛిన్న: మధ్యగతం $(N + 1)/2$ వ, Q_1 $(N + 1)/4$ వ, Q_3 $3(N + 1)/4$ వ అంశం.
- అవిచ్ఛిన్న: $I + [(\text{స్థానం} - c)/f] \times h$, స్థానం $N/2$, $N/4$, $3N/4$, $iN/10$, $iN/100$.
- మధ్యగతం = $Q_2 = D_5 = P_{50}$.

- 3 చతుర్థాంశాలు, 9 దశాంశకాలు, 99 శతాంశకాలు.
- బాహుళకం = $l + [(f_1 - f_0)/(2f_1 - f_0 - f_2)] \times h$.
- బాహుళకం = 3 మధ్యగతం - 2 సగటు.
- ఒగివ్లు మధ్యగతం వద్ద ఖండించుకుంటాయి; హిస్టోగ్రామ్ బాహుళకాన్ని ఇస్తుంది.
- కలుపుకొనే తరగతులు: వాస్తవ పరిమితులుగా మార్చండి.
- ఓపెన్ ఎండ్ తరగతులతో మధ్యగతం, బాహుళకం పనిచేస్తాయి.