

Dispersion, skewness and the normal distribution

ఉచిత నోట్స్ PDF · 2 నోట్స్ · 25 Oct 2026

Medha AI ఉచిత స్టడీ మెటీరియల్. మీ పరీక్షకు నోట్స్, ప్రాక్టీస్, మాక్ టెస్టులు, పాత పేపర్ల కోసం **app.medhaai.in** లో ఉచితంగా మొదలుపెట్టండి.

1. వ్యాప్తి: పరిధి, చతుర్థాంశ విచలనం, సగటు విచలనం, ప్రామాణిక విచలనం, విస్తృతి, వైవిధ్య గుణకం
2. మూమెంట్స్, వక్రత (కార్ల్ పియర్సన్, బౌలే), కర్టోసిస్, సాధారణ పంపిణీ

1 వ్యాప్తి: పరిధి, చతుర్థాంశ విచలనం, సగటు విచలనం, ప్రామాణిక విచలనం, విస్తృతి, వైవిధ్య గుణకం

వ్యాప్తి (dispersion) ఒక శ్రేణిలోని విలువలు వాటి సగటు చుట్టూ ఎంత దూరం చెదిరి ఉన్నాయో కొలుస్తుంది: పరిధి, చతుర్థాంశ విచలనం స్థానాలను వాడతాయి; సగటు విచలనం, ప్రామాణిక విచలనం ప్రతి విలువనూ వాడతాయి; వైవిధ్య గుణకం వేర్వేరు శ్రేణుల వ్యాప్తిని పోలుస్తుంది.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **వ్యాప్తి** = ఒక కేంద్ర విలువ చుట్టూ విలువలు చెదిరి ఉండే స్థాయి. రెండు శ్రేణులకు ఒకే సగటు ఉన్నా వ్యాప్తి చాలా భిన్నంగా ఉండవచ్చు.
- **నిరపేక్ష కొలతలు (absolute measures)** డేటా యూనిట్లలోనే ఉంటాయి: పరిధి (range), చతుర్థాంశ విచలనం (quartile deviation, QD), సగటు విచలనం (mean deviation, MD), ప్రామాణిక విచలనం (standard deviation, SD).
- **సాపేక్ష కొలతలు (relative measures)** యూనిట్లు లేని శుద్ధ సంఖ్యలు (గుణకాలు); వేర్వేరు యూనిట్లు లేదా వేర్వేరు సగటులు ఉన్న శ్రేణులను పోల్చడానికి వాడతారు.

కొలత	సూత్రం	సాపేక్ష కొలత
పరిధి	$R = L - S$	$(L - S)/(L + S)$
చతుర్థాంశ విచలనం	$(Q3 - Q1)/2$	$(Q3 - Q1)/(Q3 + Q1)$
సగటు విచలనం	A నుంచి నిరపేక్ష విచలనాల సగటు	MD/A (A = సగటు లేదా మధ్యగతం)
ప్రామాణిక విచలనం	$\sqrt{(\sum f(x - \bar{x})^2)/N}$	$CV = (\sigma/\bar{x}) \times 100$

- **అంతర చతుర్థాంశ పరిధి (interquartile range)** = $Q3 - Q1$; **QD** దానిలో సగం, కాబట్టి దీనిని **అర్థ అంతర చతుర్థాంశ పరిధి (semi-interquartile range)** అని కూడా అంటారు.
- **సగటు విచలనాన్ని** సగటు, మధ్యగతం (median) లేదా బాహుళకం (mode) నుంచి తీసుకోవచ్చు; **మధ్యగతం నుంచి తీసుకున్నప్పుడు అది కనిష్టం.**
- **ప్రామాణిక విచలనాన్ని** (σ) **కార్ల్ పియర్సన్ (Karl Pearson)** (1893) ప్రవేశపెట్టారు; ఇది **సగటు నుంచి విచలనాల వర్గమధ్యమ మూలం (root-mean-square deviation)**.
- **విస్తృతి (variance)** = σ^2 . సంక్షిప్త సూత్రం: $\sigma^2 = \sum x^2/n - \bar{x}^2$ (వ్యక్తిగత శ్రేణి) లేదా $\sum fx^2/N - \bar{x}^2$ (పొనాపున్య పట్టిక).
- **వైవిధ్య గుణకం (coefficient of variation)** (కార్ల్ పియర్సన్): $CV = \sigma/\bar{x} \times 100$. CV తక్కువ = ఎక్కువ స్థిరత్వం / ఎక్కువ ఏకరూపత / ఎక్కువ నిలకడ.
- **మూలబిందువు, స్కేలు ప్రభావం:** ప్రతి విలువకు ఒక స్థిరాంకాన్ని కలిపినా తీసివేసినా పరిధి, QD, MD, SD మారవు; k తో గుణిస్తే అవి |k| రెట్లు, విస్తృతి k^2 రెట్లు అవుతాయి.
- **మొదటి n సహజ సంఖ్యల SD** = $\sqrt{((n^2 - 1)/12)}$.
- **లారెంజ్ వక్రరేఖ (Lorenz curve)** వ్యాప్తికి (ఆదాయం లేదా సంపద పంపిణీకి) ఒక **రేఖాచిత్ర** కొలత; సమ పంపిణీ రేఖ 45° కర్ణం.

వివరణ

1. పరిధి. పరిధి = గరిష్ఠ విలువ - కనిష్ఠ విలువ. వర్గీకృత పట్టికలో అత్యున్నత తరగతి ఎగువ హద్దు నుంచి అత్యల్ప తరగతి దిగువ హద్దును తీసివేయాలి. ఇది త్వరగా వస్తుంది, కానీ రెండు అంత్య విలువలపైనే ఆధారపడుతుంది, కాబట్టి ఒక్క అసాధారణ విలువ దానిని మార్చేస్తుంది. **నాణ్యత నియంత్రణ (quality control)** చార్ట్లలో, షేర్ ధరలు, ఉష్ణోగ్రత నివేదికలలో వాడతారు.

ఉదాహరణ 1. 5, 8, 12, 15, 20 కి పరిధి, దాని గుణకం కనుగొనండి. సాధన. $R = 20 - 5 = 15$. గుణకం $= 15/(20 + 5) = 15/25$.

సమాధానం: 15; 0.6

2. చతుర్థాంశ విచలనం. ఇది అత్యల్ప 25%, అత్యధిక 25% విలువలను వదిలేస్తుంది, కాబట్టి అంత్య విలువల ప్రభావం దీనిపై ఉండదు; **ఓపెన్ ఎండ్** తరగతులకూ కనుగొనవచ్చు. వ్యక్తిగత, విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో విలువలను క్రమంలో అమర్చిన తర్వాత $Q1 = (n + 1)/4$ వ అంశం విలువ, $Q3 = 3(n + 1)/4$ వ అంశం విలువ.

ఉదాహరణ 2. 20, 28, 40, 12, 30, 15, 50, 33, 25, 45, 18 కి QD, దాని గుణకం కనుగొనండి. సాధన. క్రమంలో: 12, 15, 18, 20, 25, 28, 30, 33, 40, 45, 50; $n = 11$. $Q1 = (11 + 1)/4 = 3$ వ అంశం = 18. $Q3 = 3 \times 12/4 = 9$ వ అంశం = 40. $QD = (40 - 18)/2 = 11$. గుణకం $= (40 - 18)/(40 + 18) = 22/58$. **సమాధానం: QD 11; గుణకం ≈ 0.379**

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణిలో $Q1 = L + ((N/4 - cf)/f) \times h$, $Q3 = L + ((3N/4 - cf)/f) \times h$; ఇక్కడ L చతుర్థాంశ తరగతి దిగువ హద్దు, cf దానికి ముందున్న సంచిత పౌనఃపున్యం, f దాని పౌనఃపున్యం, h దాని వెడల్పు.

ఉదాహరణ 3. QD, దాని గుణకం కనుగొనండి.

మార్కులు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
విద్యార్థులు	5	8	12	10	5

సాధన. $N = 40$; సంచిత పౌనఃపున్యాలు 5, 13, 25, 35, 40. $Q1$: $N/4 = 10$ వ అంశం 10-20 లో ఉంది. $Q1 = 10 + ((10 - 5)/8) \times 10 = 16.25$. $Q3$: $3N/4 = 30$ వ అంశం 30-40 లో ఉంది. $Q3 = 30 + ((30 - 25)/10) \times 10 = 35$. $QD = (35 - 16.25)/2 = 9.375$. గుణకం $= 18.75/51.25$. **సమాధానం: QD 9.375; గుణకం ≈ 0.366**

3. సగటు విచలనం. సగటు లేదా మధ్యగతం నుంచి నిరపేక్ష విచలనాల (గుర్తులు వదిలేసి) సగటు. $MD = \sum |x - A|/n$, పౌనఃపున్య పట్టికకు $\sum f|x - A|/N$ (తరగతులకు మధ్య విలువలతో).

ఉదాహరణ 4. 5, 8, 12, 15, 20 కి సగటు నుంచి MD, దాని గుణకం కనుగొనండి. సాధన. $\bar{x} = 60/5 = 12$. $|x - 12| = 7, 4, 0, 3, 8$; మొత్తం 22. $MD = 22/5 = 4.4$. గుణకం $= 4.4/12$. **సమాధానం: MD 4.4; గుణకం ≈ 0.367**

ఉదాహరణ 5. మధ్యగతం నుంచి MD కనుగొనండి.

x	2	4	6	8	10
f	2	4	8	4	2

సాధన. $N = 20$, మధ్యగతం = 6 (పట్టిక సౌష్ఠ్యంగా ఉంది). $\sum f|x - 6| = 2(4) + 4(2) + 8(0) + 4(2) + 2(4) = 32$. $MD = 32/20$. **సమాధానం: 1.6**

4. ప్రామాణిక విచలనం, విస్తృతి.

- వ్యక్తిగత శ్రేణి: $\sigma = \sqrt{(\sum (x - \bar{x})^2/n)} = \sqrt{(\sum x^2/n - \bar{x}^2)}$.
- ఊహించిన సగటు (సంక్షిప్త) పద్ధతి (assumed mean method): $d = x - A$ తో $\sigma = \sqrt{(\sum fd^2/N - (\sum fd/N)^2)}$.
- సోపాన విచలన పద్ధతి (step deviation method): $d' = (x - A)/h$ తో $\sigma = h \times \sqrt{(\sum fd'^2/N - (\sum fd'/N)^2)}$.

ఉదాహరణ 6. 5, 8, 12, 15, 20 కి విస్తృతి, SD, CV కనుగొనండి. సాధన. $\bar{x} = 12$. విచలనాల వర్గాలు 49, 16, 0, 9, 64; మొత్తం 138. $\sigma^2 = 138/5 = 27.6$; $\sigma = \sqrt{27.6} \approx 5.254$. $CV = 5.254/12 \times 100$. **సమాధానం: విస్తృతి 27.6; SD ≈ 5.25 ; CV $\approx 43.8\%$**

ఉదాహరణ 7. ఉదాహరణ 3 లోని మార్కుల పట్టికకు సోపాన విచలన పద్ధతిలో సగటు, SD, CV కనుగొనండి. సాధన. మధ్య విలువలు 5, 15, 25, 35, 45; $A = 25$, $h = 10$, $d' = -2, -1, 0, 1, 2$.

m	f	d'	fd'	fd' ²
5	5	-2	-10	20
15	8	-1	-8	8
25	12	0	0	0
35	10	1	10	10
45	5	2	10	20

$\Sigma fd' = 2$, $\Sigma fd'^2 = 58$, $N = 40$. $\bar{x} = 25 + (2/40) \times 10 = 25.5$. $\sigma = 10 \times \sqrt{(58/40 - (2/40)^2)} = 10 \times \sqrt{(1.45 - 0.0025)} = 10 \times \sqrt{1.4475} \approx 12.03$. $CV = 12.03/25.5 \times 100$. **సమాధానం: సగటు 25.5; SD $\approx$ 12.03; CV $\approx$ 47.2%**

5. వైవిధ్య గుణకం, స్థిరత్వం.

ఉదాహరణ 8. కర్మాగారం A సగటు రోజువారీ వేతనం ₹300, SD ₹15 చెల్లిస్తుంది; కర్మాగారం B ₹500, SD ₹20 చెల్లిస్తుంది. వేతనాలు ఎక్కుడ ఎక్కువ ఏకరూపంగా ఉన్నాయి? సాధన. $CV(A) = 15/300 \times 100 = 5\%$; $CV(B) = 20/500 \times 100 = 4\%$. **సమాధానం: కర్మాగారం B (CV తక్కువ), దాని SD ఎక్కువైనా సరే.**

6. SD ధర్మాలు.

- ఇది ఎక్కువగా వాడే కొలత: కచ్చితంగా నిర్వచించబడింది, అన్ని విలువలపై ఆధారపడుతుంది, బీజగణిత ప్రక్రియలకు అనువైనది (సంయుక్త SD, ప్రతిచయన సిద్ధాంతం).
- విచలనాలను సగటు నుంచి తీసుకున్నప్పుడు $\Sigma(x - \bar{x})^2$ కనిష్టం, కాబట్టి సగటు నుంచి SD అతి చిన్న వర్గమధ్యమ మూల విచలనం.
- మూలబిందువు మార్పుపై ఆధారపడదు, స్కేలు మార్పుపై ఆధారపడుతుంది.
- అన్ని విలువలు సమానమైనప్పుడు మాత్రమే $\sigma = 0$.

లోతైన విశ్లేషణ

1. రెండు సమూహాల సంయుక్త ప్రామాణిక విచలనం. $\sigma_{12} = \sqrt{[(n_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2(\sigma_2^2 + d_2^2)) / (n_1 + n_2)]}$, ఇక్కడ $d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_{12}$, $d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_{12}$, $\bar{x}_{12} = (n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2)/(n_1 + n_2)$.

ఉదాహరణ 9. సెక్షన్ A: 50 విద్యార్థులు, సగటు 60, SD 8. సెక్షన్ B: 50 విద్యార్థులు, సగటు 50, SD 6. సంయుక్త SD కనుగొనండి. సాధన. $\bar{x}_{12} = (3,000 + 2,500)/100 = 55$; $d_1 = 5$, $d_2 = -5$. $\sigma_{12}^2 = [50(64 + 25) + 50(36 + 25)]/100 = (4,450 + 3,050)/100 = 75$. **సమాధానం: $\sigma_{12} = \sqrt{75} \approx 8.66$**

2. తప్పుగా రాసిన పరిశీలనను సరిచేయడం.

ఉదాహరణ 10. 20 పరిశీలనల సగటు 40, SD 5. ఒక విలువ 43 ను పొరపాటున 53 గా రాశారు. సరైన సగటు, SD కనుగొనండి. సాధన. తప్పు $\Sigma x = 20 \times 40 = 800$; సరైన $\Sigma x = 800 - 53 + 43 = 790$; సరైన సగటు = 39.5. తప్పు $\Sigma x^2 = n(\sigma^2 + \bar{x}^2) = 20(25 + 1,600) = 32,500$; సరైన $\Sigma x^2 = 32,500 - 2,809 + 1,849 = 31,540$. సరైన విస్తృతి = $31,540/20 - 39.5^2 = 1,577 - 1,560.25 = 16.75$. **సమాధానం: సగటు 39.5; SD = $\sqrt{16.75} \approx 4.09$**

3. వర్గీకృత పట్టిక సగటు విచలనం. మార్కుల పట్టికకు ($\bar{x} = 25.5$), $\Sigma f|m - 25.5| = 5(20.5) + 8(10.5) + 12(0.5) + 10(9.5) + 5(19.5) = 385$, కాబట్టి సగటు నుంచి MD = $385/40 = 9.625$.

4. ఉపయోగపడే అసమానతలు, సంబంధాలు.

- ఏ డేటాకేనా సగటు నుంచి $MD \leq SD$, $SD \leq \text{పరిధి}/2$.
- సాధారణ పంపిణీ (normal distribution) లో సుమారుగా $QD = (2/3)\sigma$, $MD = (4/5)\sigma$, కాబట్టి $QD : MD : SD \approx 10 : 12 : 15$ (కచ్చితమైన విలువలు 0.6745 σ , 0.7979 σ).
- నమూనా విస్తృతి: చాలా డిగ్రీ పార్యపుస్తకాల లాగే ఈ నోట్స్ n తో భాగిస్తాయి. పక్షపాతం లేని (unbiased) నమూనా అంచనా $n - 1$ తో భాగిస్తుంది; అది కావాలంటే ప్రశ్నలోనే చెబుతారు.

5. లారెంజ్ వక్రరేఖ (ఎం.ఓ. లారెంజ్ (M.O. Lorenz), 1905). చరరాశి (ఆదాయం) సంచిత శాతాలను Y అక్షంపై, యూనిట్ల (వ్యక్తుల) సంచిత శాతాలను X అక్షంపై, రెండూ 0 నుంచి 100 వరకు గుర్తించాలి. కర్ణమే **సమ పంపిణీ రేఖ (line of equal distribution)**. వక్రరేఖ కర్ణం కంటే ఎంత కిందికి వంగితే అసమానత అంత ఎక్కువ. **గిని గుణకం (Gini coefficient) = వక్రరేఖకు, కర్ణానికి మధ్య వైశాల్యం ÷ కర్ణం కింద ఉన్న మొత్తం వైశాల్యం** (0 = సంపూర్ణ సమానత్వం, 1 = సంపూర్ణ అసమానత).

6. గుణాలు, దోషాలు.

కొలత	గుణం	దోషం
పరిధి	అతి సరళం, త్వరితం	రెండు అంత్య విలువలు మాత్రమే
QD	అంత్య విలువల ప్రభావం లేదు; ఓపెన్ ఎండ్ తరగతులు	సగం డేటాను వదిలేస్తుంది
MD	అన్ని విలువలు; అర్థం సులభం	గుర్తులను వదిలేస్తుంది; బీజగణితానికి అనుకూలం కాదు
SD	అన్ని విలువలు; బీజగణితానికి అనువైనది	అంత్య విలువల ప్రభావం; కష్టం

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

X "పరిధి గుణకం = $(L - S)/L$." ✓ అది $(L - S)/(L + S)$.

X "QD = $Q3 - Q1$." ✓ అది అంతర చతుర్థాంశ పరిధి; $QD = (Q3 - Q1)/2$.

X "సగటు విచలనం సగటు నుంచి కనిష్టం." ✓ MD మధ్యగతం నుంచి కనిష్టం; విచలనాల వర్గాల మొత్తం సగటు నుంచి కనిష్టం.

X "SD ఎక్కువైతే ఎప్పుడూ స్థిరత్వం తక్కువ." ✓ సగటులు వేరైనప్పుడు CV పోల్చాలి.

X "ప్రతి విలువకు 10 కలిపితే SD మారుతుంది." ✓ SD మూలబిందువు మార్పుపై ఆధారపడదు; స్కేలు మార్పుతోనే మారుతుంది.

X "3 తో గుణిస్తే విస్తృతి మూడు రెట్లు." ✓ విస్తృతి 9 రెట్లు; SD మూడు రెట్లు.

X "విస్తృతి = $(\sum x)^2/n - x^2$." ✓ అది $\sum x^2/n - x^2$.

X "సోపాన విచలనం: $\sigma = \sqrt{(\sum fd^2/N - (\sum fd'/N)^2)}$." ✓ తరగతి వెడల్పుతో గుణించాలి: $\sigma = h \times \sqrt{(...)}$.

త్వరిత పునశ్చరణ

- పరిధి = $L - S$; గుణకం $(L - S)/(L + S)$.
- QD = $(Q3 - Q1)/2$; గుణకం $(Q3 - Q1)/(Q3 + Q1)$.

- $Q1 = (n + 1)/4$ వ అంశం; $Q3 = 3(n + 1)/4$ వ అంశం.
- $MD = \sum |x - A|/n$; మధ్యగతం నుంచి కనిష్ఠం.
- $\sigma^2 = \sum x^2/n - \bar{x}^2$; సోపాన విచలనం $\sigma = \sqrt{(\sum fd'^2/N - (\sum fd'/N)^2)}$.
- $CV = \sigma/\bar{x} \times 100$; CV తక్కువ = ఎక్కువ స్థిరత్వం.
- మూలబిందువు మార్పు: ప్రభావం లేదు; స్కేలు $\times k$: $SD \times |k|$, విస్తృతి $\times k^2$.
- సంయుక్త $\sigma^2 = [n_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2(\sigma_2^2 + d_2^2)]/(n_1 + n_2)$.
- సాధారణ పంపిణీ: $QD \approx (2/3)\sigma$, $MD \approx (4/5)\sigma$.
- లారెంజ్ వక్రరేఖ: రేఖాచిత్ర కొలత; కర్ణం నుంచి ఎంత దూరమైతే అంత అసమానత.

2 మూమెంట్స్, వక్రత (కార్ల్ పియర్సన్, బౌలే), కర్టోసిస్, సాధారణ పంపిణీ

వక్రత (skewness) ఒక పంపిణీలో సౌష్ఠవం ఎంత లోపించిందో కొలుస్తుంది, కర్టోసిస్ (kurtosis) సాధారణ వక్రరేఖతో పోలిస్తే అది ఎంత శిఖరాకారంగా ఉందో కొలుస్తుంది, మూమెంట్స్ (moments) ఈ రెండింటికీ ఒకే సూత్రాల కుటుంబాన్ని ఇస్తాయి; సాధారణ పంపిణీ (normal distribution) సౌష్ఠవమైన, మెసోకర్టిక్ ప్రమాణం.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **వక్రత** = సౌష్ఠవం లేకపోవడం. సౌష్ఠవ పంపిణీ (symmetric distribution) లో **సగటు = మధ్యగతం = బాహుళకం**.
- **ధనాత్మక (కుడి) వక్రత**: కుడివైపు పొడవైన తోక; **సగటు > మధ్యగతం > బాహుళకం**.
- **రుణాత్మక (ఎడమ) వక్రత**: ఎడమవైపు పొడవైన తోక; **సగటు < మధ్యగతం < బాహుళకం**.
- **కార్ల్ పియర్సన్ వక్రతా గుణకం (Karl Pearson's coefficient of skewness)**: $Sk = (\text{సగటు} - \text{బాహుళకం}) / \sigma$; బాహుళకం = 3 మధ్యగతం - 2 సగటు వాడితే $Sk = 3(\text{సగటు} - \text{మధ్యగతం}) / \sigma$. మధ్యగత రూపం హద్దులు: -3 నుంచి +3.
- **బౌలే గుణకం (Bowley's coefficient)** (చతుర్థాంశ కొలత): $Sk_B = (Q3 + Q1 - 2 \text{ మధ్యగతం}) / (Q3 - Q1)$; హద్దులు -1 నుంచి +1.
- **కెల్లీ గుణకం (Kelly's coefficient)** (శతాంశక కొలత): $(P90 + P10 - 2 \text{ మధ్యగతం}) / (P90 - P10)$.
- **సగటు నుంచి మూమెంట్స్** (సెంట్రల్ మూమెంట్స్ (central moments)): $\mu_r = \sum f(x - \bar{x})^r / N$. $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \sigma^2$.
- $\beta_1 = \mu_3^2 / \mu_2^3$ (వక్రత), $\beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$ (కర్టోసిస్); $\gamma_1 = \sqrt{\beta_1}$, గుర్తు μ_3 దే; $\gamma_2 = \beta_2 - 3$.
- **కర్టోసిస్** = శిఖరాకారం (కార్ల్ పియర్సన్, 1905):
 - $\beta_2 = 3$: **మెసోకర్టిక్ (mesokurtic)** (సాధారణ);
 - $\beta_2 > 3$: **లెప్టోకర్టిక్ (leptokurtic)** (ఎక్కువ శిఖరాకారం);
 - $\beta_2 < 3$: **ప్లాటికర్టిక్ (platykurtic)** (చదునైన పైభాగం).
- **సాధారణ పంపిణీ**: గంట ఆకారం, μ చుట్టూ సౌష్ఠవం, సగటు = మధ్యగతం = బాహుళకం = μ , $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 3$, మొత్తం వైశాల్యం 1.
- **వైశాల్యాలు**: $\mu \pm \sigma$ పరిధిలో **68.27%**, $\mu \pm 2\sigma$ లో **95.45%**, $\mu \pm 3\sigma$ లో **99.73%**; $\mu \pm 1.96\sigma$ లో 95%, $\mu \pm 2.58\sigma$ లో 99%.
- **ప్రామాణిక సాధారణ చరరాశి (standard normal variate)**: $Z = (X - \mu) / \sigma$, సగటు 0, SD 1.

వివరణ

1. వక్రత పరీక్షలు. ఒక పంపిణీ వక్రంగా ఉంటే (a) సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకం వేర్వేరుగా ఉంటాయి; (b) చతుర్థాంశాలు మధ్యగతం నుంచి సమదూరంలో ఉండవు ($Q3 - Md \neq Md - Q1$); (c) వక్రరేఖకు ఒకవైపు పొడవైన తోక ఉంటుంది; (d) బాహుళకానికి ఇరువైపులా మొత్తం పొడవునా సమానంగా ఉండవు.

అనుభవ సంబంధం (empirical relation) (కార్ల్ పియర్సన్) మోస్తరు వక్రత ఉన్న డేటాకు: **బాహుళకం = 3 మధ్యగతం - 2 సగటు**, అంటే **సగటు - బాహుళకం = 3(సగటు - మధ్యగతం)**.

2. కార్ల్ పియర్సన్ గుణకం.

ఉదాహరణ 1. సగటు 50, మధ్యగతం 48, SD 10. కార్ల్ పియర్సన్ వక్రతా గుణకం కనుగొనండి. సాధన. $Sk = 3(50 - 48) / 10 = 6 / 10$. **సమాధానం: +0.6 (ధనాత్మక వక్రత)**

ఉదాహరణ 2. సగటు 45, బాహుళకం 50, SD 8. సాధన. $Sk = (45 - 50)/8$. **సమాధానం: -0.625 (రుణాత్మక వక్రత)**

3. బోలే గుణకం. ఇది Q1, మధ్యగతం, Q3 లను మాత్రమే వాడుతుంది కాబట్టి ఓపెన్ ఎండ్ తరగతులకు, బాహుళకం స్పష్టంగా నిర్వచించలేనప్పుడు ఉపయోగపడుతుంది. ఇది ప్రతి చివర 25% విలువలను వదిలేస్తుంది.

ఉదాహరణ 3. Q1 = 20, మధ్యగతం = 30, Q3 = 50. బోలే గుణకం కనుగొనండి. సాధన. $Sk_B = (50 + 20 - 60)/(50 - 20) = 10/30$. **సమాధానం: +0.33** (Q1 కంటే Q3 మధ్యగతం నుంచి ఎక్కువ దూరంలో ఉంది)

4. సమూహ డేటా (grouped data) పట్టికపై రెండు కొలతలు.

మార్కులు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
విద్యార్థులు	5	8	12	10	5

వ్యాప్తి నోట్ నుంచి (అదే పట్టిక): సగటు = 25.5, $\sigma \approx 12.03$, Q1 = 16.25, Q3 = 35.

ఉదాహరణ 4. కార్ల్ పియర్సన్ (బాహుళక రూపం), బోలే గుణకాలు కనుగొనండి. సాధన.

- సంచిత పౌనఃపున్యాలు 5, 13, 25, 35, 40; $N/2 = 20$ అనేది 20-30 లో ఉంది. మధ్యగతం = $20 + ((20 - 13)/12) \times 10 \approx 25.83$.
- బాహుళక తరగతి 20-30 ($f_1 = 12$, $f_0 = 8$, $f_2 = 10$). బాహుళకం = $20 + (12 - 8)/(2 \times 12 - 8 - 10) \times 10 = 20 + (4/6) \times 10 \approx 26.67$.
- కార్ల్ పియర్సన్: $Sk = (25.5 - 26.67)/12.03 \approx -0.097$.
- బోలే: $Sk_B = (35 + 16.25 - 2 \times 25.83)/(35 - 16.25) = (51.25 - 51.67)/18.75 \approx -0.022$.

సమాధానం: సుమారు -0.10, -0.02; చాలా స్వల్ప రుణాత్మక వక్రత

5. మూమెంట్స్.

- ఏదైనా మూలబిందువు A నుంచి ముడి మూమెంట్స్ (raw moments): $\mu'_r = \sum f(x - A)^r / N$. సున్నా నుంచి వాటిని v_r అని రాస్తారు ($v_1 =$ సగటు).
- ముడి మూమెంట్స్ ను సెంట్రల్ మూమెంట్స్ గా మార్చడం ($\mu'_1 = x - A$):
 - $\mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1$
 - $\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2\mu'^3_1$
 - $\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 + 6\mu'_2\mu'^2_1 - 3\mu'^4_1$
- సగటు నుంచి మొదటి మూమెంట్ ఎప్పుడూ 0; రెండోది విస్తృతి (variance); మూడోది వక్రతను, నాలుగోది కర్టోసిస్ ను కొలుస్తాయి.

ఉదాహరణ 5. 4 నుంచి మొదటి నాలుగు మూమెంట్స్ 1, 4, 10, 45. సగటు, సెంట్రల్ మూమెంట్స్ కనుగొని వక్రత, కర్టోసిస్ పై వ్యాఖ్యానించండి. సాధన. సగటు = $4 + 1 = 5$. $\mu_2 = 4 - 1 = 3$. $\mu_3 = 10 - 3(4)(1) + 2(1) = 0$. $\mu_4 = 45 - 4(10)(1) + 6(4)(1) - 3(1) = 26$. $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = 26/9 \approx 2.89$. **సమాధానం: సౌష్ఠవం ($\beta_1 = 0$), కొద్దిగా ప్లాటికర్టిక్ ($\beta_2 < 3$)**

6. సాధారణ వక్రరేఖ. సంభావ్యత సాంద్రత (probability density) $f(x) = (1/(\sigma\sqrt{2\pi})) e^{-(x - \mu)^2/(2\sigma^2)}$, $-\infty < x < \infty$. దీనిని **డి మోయివర్ (De Moivre)** (1733) రూపొందించారు, **లాప్లాస్ (Laplace)**, **గాస్ (Gauss)** అభివృద్ధి చేశారు, కాబట్టి దీనిని **గాసియన్ వక్రరేఖ** అని కూడా అంటారు. ధర్మాలు:

- గంట ఆకారం, ఏక బాహుళక (unimodal), $x = \mu$ చుట్టూ సౌష్ఠవం;
- సగటు = మధ్యగతం = బాహుళకం = μ ; చతుర్థాంశాలు $\mu \pm 0.6745\sigma$ వద్ద;
- వక్రరేఖ x-అక్షాన్ని ఎప్పుడూ తాకదు (**అనంతస్పర్శి (asymptotic)**);
- **వంపు మార్పు బిందువులు (points of inflexion)** $\mu \pm \sigma$ వద్ద;
- $x = \mu$ వద్ద గరిష్ఠ కోటి (maximum ordinate), అది $1/(\sigma\sqrt{2\pi}) \approx 0.3989/\sigma$;

- బేసి సెంట్రల్ మూమెంట్స్ $0; \mu_2 = \sigma^2, \mu_4 = 3\sigma^4$, కాబట్టి $\beta_1 = 0, \beta_2 = 3$;
- $QD \approx 0.6745\sigma$ (సుమారు $2\sigma/3$), $MD \approx 0.7979\sigma$ (సుమారు $4\sigma/5$);
- దాని రెండు పరామితులు μ, σ దానిని పూర్తిగా నిర్ణయిస్తాయి.

ఉదాహరణ 6. మార్కులు సగటు 60, SD 10 తో సాధారణ పంపిణీలో ఉన్నాయి. 50, 70 మధ్య మార్కులు పొందేవారు ఎంత శాతం? 80 పైన? సాధన. 50, 70 అంటే $\mu \pm \sigma$: **68.27%**. 80 అంటే $\mu + 2\sigma$; $z = 2$ దాటిన వైశాల్యం $(1 - 0.9545)/2 \approx 0.0228$.
సమాధానం: సుమారు 68.3%; సుమారు 2.3%

లోతైన విశ్లేషణ

1. సాధారణ పట్టిక వాడకం. పట్టికలు 0 నుంచి z వరకు వైశాల్యాన్ని ఇస్తాయి. ఉపయోగపడే విలువలు: $z = 0.5 \rightarrow 0.1915$; $z = 1 \rightarrow 0.3413$; $z = 1.5 \rightarrow 0.4332$; $z = 1.96 \rightarrow 0.4750$; $z = 2 \rightarrow 0.4772$; $z = 2.58 \rightarrow 0.4951$; $z = 3 \rightarrow 0.49865$.

ఉదాహరణ 7. 1,000 మంది విద్యార్థుల మార్కులు సగటు 60, SD 10 తో సాధారణ పంపిణీలో ఉన్నాయి. 75 కంటే ఎక్కువ ఎంతమంది పొందుతారు? సాధన. $z = (75 - 60)/10 = 1.5$. పైన ఉన్న వైశాల్యం $= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$. $0.0668 \times 1,000 \approx 66.8$.
సమాధానం: సుమారు 67 మంది విద్యార్థులు

ఉదాహరణ 8. అదే మార్కుల పంపిణీలో 500 మంది విద్యార్థులలో 50, 65 మధ్య ఎంతమంది పొందుతారు? సాధన. $z = -1, z = 0.5$. వైశాల్యం $= 0.3413 + 0.1915 = 0.5328$; $\times 500 \approx 266.4$.
సమాధానం: సుమారు 266 మంది విద్యార్థులు

2. వ్యక్తిగత శ్రేణి మూమెంట్స్.

ఉదాహరణ 9. 2, 3, 7, 8, 10 కి $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \beta_1, \beta_2$ కనుగొనండి. సాధన. $\bar{x} = 30/5 = 6$; విచలనాలు -4, -3, 1, 2, 4. $\mu_2 = (16 + 9 + 1 + 4 + 16)/5 = 46/5 = 9.2$. $\mu_3 = (-64 - 27 + 1 + 8 + 64)/5 = -18/5 = -3.6$. $\mu_4 = (256 + 81 + 1 + 16 + 256)/5 = 610/5 = 122$. $\beta_1 = (-3.6)^2/9.2^3 = 12.96/778.688 \approx 0.0166$; $\beta_2 = 122/9.2^2 = 122/84.64 \approx 1.44$.
సమాధానం: స్వల్ప రుణాత్మక వక్రత ($\mu_3 < 0$); ప్లాటికర్టిక్ ($\beta_2 < 3$)

3. మూలబిందువు, స్కేలు ప్రభావం. సెంట్రల్ మూమెంట్స్ మూలబిందువు మార్పుతో మారవు; $y = (x - A)/h$ అయితే $\mu_r(x) = h^r \mu_r(y)$. కాబట్టి β_1, β_2 శుద్ధ సంఖ్యలు, మూలబిందువు, స్కేలు రెండింటిపైనా ఆధారపడవు.

4. షెపర్డ్ సవరణలు (Sheppard's corrections) (సమూహ డేటా, సమాన వెడల్పు h , రెండు చివరల పొడవునా క్రమంగా సున్నాకు తగ్గేటప్పుడు):

- సవరించిన $\mu_2 = \mu_2 - h^2/12$;
- μ_3 కి సవరణ అవసరం లేదు;
- సవరించిన $\mu_4 = \mu_4 - (1/2)h^2\mu_2 + (7/240)h^4$.

5. ఇతర వాస్తవాలు.

- $\beta_1 \geq 0$ ఎప్పుడూ (అది ఒక వర్గం), కాబట్టి అది వక్రత **దిశను** చూపలేదు; γ_1 లేదా μ_3 గుర్తును వాడాలి.
- ప్రతి పంపిణీకి $\beta_2 \geq 1, \beta_2 \geq \beta_1 + 1$.
- శతాంశక కర్టోసిస్ గుణకం $k = QD/(P90 - P10)$; సాధారణ వక్రరేఖకు $k \approx 0.263$.
- సాధారణ ఉజ్జాయింపు: n పెద్దదై p విలువ 0 లేదా 1 కి దగ్గరగా లేనప్పుడు **ద్విపద (binomial)** పంపిణీ సాధారణ పంపిణీకి చేరుతుంది; **పాయిజాన్ (Poisson)** పంపిణీ సగటు పెద్దదైనప్పుడు సాధారణ పంపిణీకి చేరుతుంది. **కేంద్ర అవధి సిద్ధాంతం (central limit theorem)** వల్ల నమూనా సగటులు సుమారుగా సాధారణ పంపిణీలో ఉంటాయి; అందుకే చాలా పెద్ద నమూనా పరీక్షలు z ని వాడతాయి.
- సాధారణ వక్రరేఖ ఉపయోగాలు: ప్రతిచయన సిద్ధాంతం, సార్థకత పరీక్షలు (tests of significance), నాణ్యత నియంత్రణ హద్దులు ($\mu \pm 3\sigma$), గ్రేడింగ్, స్కార్లను ప్రామాణీకరించడం.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

X "ధనాత్మక వక్రతలో సగటు < మధ్యగతం < బాహుళకం." ✓ ధనాత్మక వక్రత: **సగటు > మధ్యగతం > బాహుళకం.**

X "బౌలే గుణకం -3, +3 మధ్య ఉంటుంది." ✓ బౌలే గుణకం **-1, +1** మధ్య; కార్ల్ పియర్సన్ మధ్యగత రూపం -3, +3 మధ్య.

X "కార్ల్ పియర్సన్ గుణకం = (సగటు - మధ్యగతం)/ σ ." ✓ అది **(సగటు - బాహుళకం)/ σ** లేదా **3(సగటు - మధ్యగతం)/ σ .**

X "అనుభవ సంబంధం: బాహుళకం = 3 సగటు - 2 మధ్యగతం." ✓ **బాహుళకం = 3 మధ్యగతం - 2 సగటు.**

X "లెప్టోకర్టిక్ అంటే $\beta_2 < 3$." ✓ లెప్టోకర్టిక్ (శిఖరాకారం) అంటే **$\beta_2 > 3$** ; ప్లాటికర్టిక్ (చదును) అంటే $\beta_2 < 3$.

X "సగటు నుంచి మొదటి మూమెంట్ సగటు." ✓ అది **0**; రెండో సెంట్రల్ మూమెంట్ **విస్తృతి.**

X "రుణాత్మక వక్రత డేటాకు β_1 రుణాత్మకం." ✓ β_1 ఒక వర్గం, ఎప్పుడూ రుణాత్మకం కాదు; **μ_3 (లేదా γ_1) గుర్తు దిశను చూపుతుంది.**

X "సాధారణ వక్రరేఖ వంపు మార్పు బిందువులు $\mu \pm 2\sigma$ వద్ద." ✓ అవి **$\mu \pm \sigma$ వద్ద.**

X "సాధారణ వక్రరేఖ $\mu \pm 3\sigma$ వద్ద x-అక్షాన్ని తాకుతుంది." ✓ అది అక్షాన్ని **ఎప్పుడూ** తాకదు; వైశాల్యంలో 99.73% $\mu \pm 3\sigma$ లోపల ఉంటుంది.

త్వరిత పునశ్చరణ

- సౌష్ఠ్యం: సగటు = మధ్యగతం = బాహుళకం; ధనాత్మక వక్రత: సగటు > మధ్యగతం > బాహుళకం.
- కార్ల్ పియర్సన్ $S_k = (\text{సగటు} - \text{బాహుళకం})/\sigma = 3(\text{సగటు} - \text{మధ్యగతం})/\sigma$.
- బౌలే $S_k = (Q_3 + Q_1 - 2Md)/(Q_3 - Q_1)$, -1, +1 మధ్య.
- బాహుళకం = 3 మధ్యగతం - 2 సగటు.
- $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \sigma^2$; $\beta_1 = \mu_3^2/\mu_2^3$, $\beta_2 = \mu_4/\mu_2^2$.
- $\beta_2 = 3$ మెసో, > 3 లెప్టో, < 3 ప్లాటి; $\gamma_2 = \beta_2 - 3$.
- $\mu_3 = \mu'^3 - 3\mu'^2\mu'_1 + 2\mu'^1\mu'^3$.
- సాధారణ పంపిణీ: $\mu \pm \sigma$ వద్ద వంపు మార్పు; అనంతస్పర్శి; $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 3$.
- వైశాల్యాలు: 68.27%, 95.45%, 99.73%; $1.96\sigma \rightarrow 95\%$, $2.58\sigma \rightarrow 99\%$.
- $Z = (X - \mu)/\sigma$; $QD \approx 2\sigma/3$, $MD \approx 4\sigma/5$.