MEDHA AI

STATISTICS

Measures of central tendency

2 అంశాలు · జవాబులతో 19 ప్రాక్టీస్ ప్రశ్నలు · 2026

ఉచిత అధ్యాయం · app.medhaai.in లో మొత్తం కోర్సు





విషయ సూచిక

STATISTICS

1 Measures of central tendency — 2 అంశాలు

1.1 అంకగణిత, భారిత, గుణ, హార్మోనిక్ సగటులు, వాటి మధ్య సంబంధం 3

1.2 ముడి, సమూహ డేటాకు మధ్యగతం, బాహుళకం, విభాగ విలువలు (చతుర్థాంశాలు, దశాంశకాలు, శతాంశకాలు) 7

త్వరిత పునశ్చరణ 12

ప్రాక్టీస్ ప్రశ్నలు, జవాబులు 13

అధ్యాయం 1 · Statistics

Measures of central tendency

2 అంశాలు

1.1 అంకగణిత, భారిత, గుణ, హార్మోనిక్ సగటులు, వాటి మధ్య సంబంధం

అంకగణిత సగటు మొత్తాన్ని అందరికీ సమానంగా పంచుతుంది, గుణ మధ్యమం నిష్పత్తులు, వృద్ధి రేట్లకు సగటు ఇస్తుంది, హార్మోనిక్ సగటు వేగం వంటి రేట్లకు సగటు ఇస్తుంది; ధన విలువలకు ఎల్లప్పుడూ AM ≥ GM ≥ HM.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **అంకగణిత సగటు (arithmetic mean, AM)**, గుర్తు $\bar{x}$:
  - వ్యక్తిగత శ్రేణి (individual series): $\bar{x} = \Sigma x \div n$;
  - విచ్ఛిన్న శ్రేణి (discrete series): $\bar{x} = \Sigma fx \div N$, $N = \Sigma f$;
  - అవిచ్ఛిన్న శ్రేణి (continuous series): x = తరగతి మధ్య విలువ (mid-value), సూత్రం అదే;
  - సంక్షిప్త పద్ధతి (ఊహించిన సగటు (assumed mean) A, $d = x - A$): $\bar{x} = A + \Sigma fd \div N$;
  - సోపాన విచలనం (step deviation) ($d' = (x - A)/h$): $\bar{x} = A + (\Sigma fd' \div N) \times h$.
- **AM లక్షణాలు:**
  - $\Sigma(x - \bar{x}) = 0$: సగటు నుంచి విచలనాల (deviations) మొత్తం సున్నా;
  - **$A = \bar{x}$ అయినప్పుడు $\Sigma(x - A)^2$ కనిష్ఠం**;
  - **సంయుక్త సగటు (combined mean)** $\bar{x}_{12} = (n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2) \div (n_1 + n_2)$;
  - మూల బిందువు, స్కేలు మార్పు (change of origin and scale): $u = (x - A)/h$ అయితే $\bar{x} = A + h\bar{u}$.
- **భారిత సగటు (weighted mean): $\bar{xw} = \Sigma wx \div \Sigma w$**. అన్ని భారాలు సమానమైతే ఇది సాధారణ AMకు సమానం.
- **గుణ మధ్యమం (geometric mean, GM):** n విలువల లబ్ధానికి n-వ మూలం.
  - **$GM = (x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n)^{(1/n)}$**;
  - సంవర్గమానాల (logarithms) ద్వారా: **$GM = \text{antilog}(\Sigma \log x \div n)$**; సమూహ డేటాకు: **$\text{antilog}(\Sigma f \log x \div N)$**;
  - భారిత: $\text{antilog}(\Sigma w \log x \div \Sigma w)$.
- **హార్మోనిక్ సగటు (harmonic mean, HM):** వ్యుత్క్రమాల (reciprocals) AMకు వ్యుత్క్రమం.
  - **$HM = n \div \Sigma(1/x)$**; సమూహ డేటాకు: **$HM = N \div \Sigma(f/x)$**.
- **సంబంధం:** ధన విలువలకు **$AM \geq GM \geq HM$**; అన్ని విలువలు ఒకటే అయినప్పుడు మాత్రమే మూడూ సమానం.

- **రెండు ధన సంఖ్యలు a, b:** AM = (a + b)/2, GM = √(ab), HM = 2ab/(a + b), మరియు **$GM^2 = AM \times HM$**.
- **ఉపయోగాలు:** సాధారణ సగటులకు AM; సగటు **వృద్ధి రేట్లు (growth rates)**, నిష్పత్తులు, శాతాలు, **సూచిక సంఖ్యల (index numbers)**కు **GM**; సమాన దూరాలపై సగటు **వేగం**, సమాన మొత్తంలో డబ్బు ఖర్చు చేసినప్పుడు సగటు **ధర**కు **HM**.
- ఏదైనా విలువ **సున్నా** అయితే GM, HM వాడలేం; **రుణ** విలువలతో GM వాడరు.

ఉదాహరణ 1. 12, 18, 25, 30, 15 ల AM కనుగొనండి. *సాధన.* Σx = 100, n = 5. **సమాధానం: 20**

ఉదాహరణ 2. 4, 9, 6 ల GM కనుగొనండి. *సాధన.* లబ్ధం = 216; 216 యొక్క ఘనమూలం. **సమాధానం: 6**

ఉదాహరణ 3. 2, 3, 6 ల HM కనుగొనండి. *సాధన.* Σ(1/x) = 1/2 + 1/3 + 1/6 = 1. HM = 3 ÷ 1. **సమాధానం: 3**

1. సోపాన విచలన పద్ధతిలో అవిచ్ఛిన్న శ్రేణి AM. d′ చిన్న పూర్ణ సంఖ్యలు అయ్యేలా A ను మధ్యలో ఉన్న మధ్య విలువగా, h ను తరగతి అంతరంగా (class interval) తీసుకోండి.

ఉదాహరణ 4. సగటు కనుగొనండి.

తరగతి	మధ్య విలువ x	f	d′ = (x − 25)/10
0–10	5	6	−2
10–20	15	10	−1
20–30	25	14	0
30–40	35	12	1
40–50	45	8	2

సాధన. fd′ = −12, −10, 0, 12, 16, కాబట్టి Σfd′ = 6, N = 50. $\bar{x} = 25 + (6 \div 50) \times 10 = 25 + 1.2$. **సమాధానం: 26.2**
(ప్రత్యక్ష పద్ధతి: Σfx = 1,310; 1,310 ÷ 50 = 26.2.)

2. భారిత సగటు. అంశాలు సమాన ప్రాముఖ్యం లేనివి అయినప్పుడు (వేర్వేరు క్రెడిట్‌లు గల సబ్జెక్టులు, సూచికలోని సరుకులు) దీనిని వాడండి.

ఉదాహరణ 5. ఒక విద్యార్థి మూడు పేపర్లలో 60, 75, 80 మార్కులు పొందాడు; వాటి భారాలు 2, 3, 5. భారిత సగటు కనుగొనండి. *సాధన.* Σwx = 120 + 225 + 400 = 745; Σw = 10. **సమాధానం: 74.5** (సాధారణ సగటు 71.67 అవుతుంది).

3. సంయుక్త సగటు.

ఉదాహరణ 6. సెక్షన్ Aలో 40 మంది విద్యార్థులు, సగటు 52; సెక్షన్ Bలో 60 మంది, సగటు 47. మొత్తం 100 మంది సగటు కనుగొనండి. *సాధన.* (40 × 52 + 60 × 47) ÷ 100 = (2,080 + 2,820) ÷ 100. **సమాధానం: 49**

4. సవరించిన సగటు. మొత్తాన్ని సరిచేసి, మళ్లీ భాగించండి.

ఉదాహరణ 7. 50 పరిశీలనల (observations) సగటు 36. తర్వాత 43 ను పొరపాటున 34 గా రాశారని తెలిసింది. సరైన సగటు కనుగొనండి. *సాధన.* తప్పు మొత్తం 1,800. సరైన మొత్తం = 1,800 − 34 + 43 = 1,809. 1,809 ÷ 50. **సమాధానం: 36.18**

5. సగటు వృద్ధికి GM. వృద్ధి రేట్లు గుణకారంగా పెరుగుతాయి, కాబట్టి వాటి సగటు అంటే రేట్ల AM కాదు, వృద్ధి కారకాల (1 + r) GM.

ఉదాహరణ 8. వరుసగా మూడు సంవత్సరాల్లో ఉత్పత్తి 8%, 12%, 25% పెరిగింది. సగటు వార్షిక వృద్ధి రేటు కనుగొనండి. *సాధన.* కారకాలు 1.08, 1.12, 1.25; లబ్ధం = 1.512. GM = 1.512^(1/3) = 1.1478 (సంవర్గమాన మార్గం: Σ log = 0.17955, ÷ 3 = 0.05985, antilog = 1.1478). **సమాధానం: సంవత్సరానికి సుమారు 14.78%** (రేట్ల AM, 15%, దీనిని ఎక్కువగా చూపుతుంది).

6. సగటు వేగానికి HM.

ఉదాహరణ 9. ఒక కారు A నుంచి Bకి 60 కి.మీ./గం. వేగంతో వెళ్లి, 40 కి.మీ./గం. వేగంతో తిరిగి వస్తుంది. రెండు వైపుల ప్రయాణానికి సగటు వేగం కనుగొనండి. *సాధన.* దూరాలు సమానం, కాబట్టి HM వాడండి: 2 ÷ (1/60 + 1/40) = 2 ÷ (5/120). **సమాధానం: 48 కి.మీ./గం.** (50 కాదు).

ఉదాహరణ 10. ఒక కొనుగోలుదారు కి.గ్రా. ₹4 చొప్పున బియ్యంపై ₹100, కి.గ్రా. ₹5 చొప్పున మరో ₹100 ఖర్చు చేస్తాడు. కి.గ్రా.కు సగటు ధర కనుగొనండి. *సాధన.* ఖర్చు చేసిన డబ్బు సమానం, కాబట్టి HM: 2 ÷ (1/4 + 1/5) = 40/9. **సమాధానం: కి.గ్రా.కు సుమారు ₹4.44** (₹200కు 25 + 20 = 45 కి.గ్రా. వస్తుంది).

7. మూడు సగటులు పక్కపక్కనే.

ఉదాహరణ 11. 2, 3, 6 లకు: AM = 11/3 = 3.67, GM = 36^(1/3) = 3.30, HM = 3. అసమాన ధన విలువలకు ఉండాల్సినట్లే AM > GM > HM క్రమం నిలుస్తుంది.

సగటు	దేనికి ఉత్తమం	ఎక్కువ ప్రాధాన్యం దేనికి	ఎప్పుడు విఫలం
AM	సమానంగా పంచే సాధారణ మొత్తాలు	పెద్ద విలువలు	తీవ్ర విలువలు దీనిని వక్రీకరిస్తాయి
GM	నిష్పత్తులు, వృద్ధి రేట్లు, సూచిక సంఖ్యలు	పెద్ద విలువలకు, AM కంటే తక్కువగా	ఏదైనా విలువ సున్నా లేదా రుణం
HM	వేగాలు, ఒక్కో యూనిట్‌కు రేట్లు (సమాన మొత్తాలు)	చిన్న విలువలు	ఏదైనా విలువ సున్నా

లోతైన విశ్లేషణ

1. AM ≥ GM ≥ HM ఎందుకు (రెండు సంఖ్యలు). $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ నుంచి $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, కాబట్టి AM ≥ GM. HM =

$GM^2 \div AM$, $AM \geq GM$ కాబట్టి $HM \leq GM$. $a = b$ అయినప్పుడు మాత్రమే సమానత్వం.

ఉదాహరణ 12. రెండు సంఖ్యల AM 25, HM 16. GM, ఆ సంఖ్యలు కనుగొనండి. *సాధన.* $GM = \sqrt{(25 \times 16)} = 20$. కాబట్టి $a + b = 50$, $ab = 400$; సంఖ్యలు 40, 10 (సరిచూడండి: $HM = 2 \times 400 \div 50 = 16$). **సమాధానం: GM 20; సంఖ్యలు 40, 10**

2. సమూహ డేటాకు GM, HM.

ఉదాహరణ 13. AM, GM, HM కనుగొనండి.

x	5	10	20	40
f	2	3	3	2

సాధన. $N = 10$.

- $AM = (10 + 30 + 60 + 80) \div 10 = \mathbf{18}$.
- $\log x = 0.6990, 1.0000, 1.3010, 1.6021$; $\Sigma f \log x = 11.5051$; $\div 10 = 1.15051$; antilog = **14.14** (సరిగ్గా $\sqrt{200}$).
- $\Sigma(f/x) = 0.4 + 0.3 + 0.15 + 0.05 = 0.9$; $HM = 10 \div 0.9 = \mathbf{11.11}$.

సమాధానం: AM 18, GM 14.14, HM 11.11

3. భారిత HM (అసమాన మొత్తాలు). వేర్వేరు మొత్తాలు ఖర్చు చేసినప్పుడు లేదా దూరాలు వేరైనప్పుడు, ప్రతి రేటుకు ఆ మొత్తం లేదా దూరాన్ని భారంగా ఇవ్వండి.

ఉదాహరణ 14. ఒక సరుకుపై కి.గ్రా. ₹4 చొప్పున ₹100, కి.గ్రా. ₹5 చొప్పున ₹200 ఖర్చు చేశారు. సగటు ధర కనుగొనండి. *సాధన.* ₹300కు పరిమాణం = 25 + 40 = 65 కి.గ్రా. భారిత $HM = 300 \div (100/4 + 200/5)$. **సమాధానం: కి.గ్రా.కు సుమారు ₹4.62**

ఉదాహరణ 15. ఒక సైక్లిస్టు 30 కి.మీ. దూరం 30 కి.మీ./గం. వేగంతో, తర్వాత 90 కి.మీ. దూరం 45 కి.మీ./గం. వేగంతో ప్రయాణిస్తాడు. సగటు వేగం కనుగొనండి. *సాధన.* 120 కి.మీ.కు సమయం = 1 గం. + 2 గం. = 3 గం. **సమాధానం: 40 కి.మీ./గం.**

4. లోపించిన పౌనఃపున్యం.

ఉదాహరణ 16. ఈ పంపిణీ సగటు 25. p కనుగొనండి.

x	10	20	30	40
f	5	p	10	5

సాధన. $(50 + 20p + 300 + 200) \div (20 + p) = 25$ నుంచి $550 + 20p = 500 + 25p$, కాబట్టి $p = 10$. **సమాధానం: 10**

5. GM ఉపయోగకర లక్షణాలు.

- log GM = సంవర్గమానాల సగటు, కాబట్టి గుణకారంతో పెరిగే డేటాకు GM సరిపోతుంది.
- రెండు శ్రేణుల నిష్పత్తుల GM = వాటి GMల నిష్పత్తి; అందుకే GM సూచిక **టైమ్ రివర్సల్ పరీక్ష (time reversal test)**ను సంతృప్తిపరుస్తుంది (సూచిక సంఖ్యలు చూడండి).
- ప్రతి విలువను k తో గుణిస్తే AM, GM, HM కూడా k రెట్లు అవుతాయి; k కలిపితే AM k మేరకు మారుతుంది, కానీ GM, HM k మేరకు మారవు.

6. AM గుణాలు, పరిమితులు (పాఠ్యపుస్తక జాబితా). కచ్చితంగా నిర్వచించబడింది, అన్ని అంశాలపై ఆధారపడుతుంది, బీజగణిత ప్రక్రియలకు అనువైనది, ప్రతిచయన (sampling) హెచ్చుతగ్గులకు అతి తక్కువగా ప్రభావితమవుతుంది; కానీ తీవ్ర విలువలు దీనిని వక్రీకరిస్తాయి, ఊహలు లేకుండా ఓపెన్ ఎండ్ తరగతులకు (open-end classes) కనుగొనలేం, పరిశీలన ద్వారా గానీ గ్రాఫ్ ద్వారా గానీ గుర్తించలేం.

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

- ✗ "సగటు వృద్ధి రేటు = వార్షిక రేట్ల AM." ✓ **కారకాల (1 + r) GM** వాడి, తర్వాత 1 తీసివేయండి.
- ✗ "సమాన దూరాలపై సగటు వేగం = (60 + 40)/2 = 50." ✓ **HM** వాడండి: **48 కి.మీ./గం.**
- ✗ "HM ≥ GM ≥ AM." ✓ ధన విలువలకు **AM ≥ GM ≥ HM**.
- ✗ "$GM^2 = AM + HM$." ✓ రెండు సంఖ్యలకు **$GM^2 = AM \times HM$**.
- ✗ "$\Sigma(x - x)^2$ సున్నా." ✓ **$\Sigma(x - \bar{x}) = 0$**; $\Sigma(x - x)^2$ వర్గాల **కనిష్ఠ** మొత్తం.
- ✗ "సోపాన విచలనంలో $\bar{x} = A + \Sigma fd' \div N$." ✓ తరగతి అంతరంతో గుణించండి: **$\bar{x} = A + (\Sigma fd' \div N) \times h$**.
- ✗ "సంయుక్త సగటు = రెండు సగటుల సగటు." ✓ పరిమాణాలతో భారం ఇవ్వండి: **$(n_1\bar{x_1} + n_2\bar{x_2}) \div (n_1 + n_2)$**.

1.2 ముడి, సమూహ డేటాకు మధ్యగతం, బాహుళకం, విభాగ విలువలు (చతుర్థాంశాలు, దశాంశకాలు, శతాంశకాలు)

మధ్యగతం క్రమంలో అమర్చిన డేటాను రెండు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తుంది, చతుర్థాంశాలు, దశాంశకాలు, శతాంశకాలు దానిని 4, 10, 100 సమాన భాగాలుగా విభజిస్తాయి, బాహుళకం అత్యధికంగా వచ్చే విలువ; సమూహ డేటాకు ప్రతిదానిని దాని తరగతిలో అంతర్వేశనం (interpolation) ద్వారా కనుగొంటారు.

ముఖ్య వాస్తవాలు

- **మధ్యగతం (median), చతుర్థాంశాలు (quartiles), దశాంశకాలు (deciles), శతాంశకాలు (percentiles) స్థాన సగటులు (positional averages)** (విభాగ విలువలు (partition values)); ముందుగా డేటాను (data) **క్రమంలో అమర్చాలి**.

- **విభజన బిందువుల సంఖ్య:** చతుర్థాంశాలు **3** (Q_1, Q_2, Q_3), దశాంశకాలు **9**, శతాంశకాలు **99**.
- **సమానతలు: మధ్యగతం = $Q_2 = D_5 = P_{50}$**; $Q_1 = P_{25}$; $Q_3 = P_{75}$; $D_1 = P_{10}$.
- **వ్యక్తిగత, విచ్ఛిన్న శ్రేణులు (discrete series)** (పాఠ్యపుస్తక పద్ధతి):
  - మధ్యగతం = **((N + 1)/2)వ** అంశం పరిమాణం;
  - Q_1 = **((N + 1)/4)వ** అంశం, Q_3 = **(3(N + 1)/4)వ** అంశం;
  - D_i = (i(N + 1)/10)వ అంశం, P_i = (i(N + 1)/100)వ అంశం;
  - విచ్ఛిన్న శ్రేణిలో, స్థానానికి సమానమైన లేదా దానిని మించిన మొదటి సంచిత పౌనఃపున్యం (cumulative frequency, cf) ను కనుగొనండి.
- **అవిచ్ఛిన్న శ్రేణి (continuous series)** (+1 లేకుండా N/2, N/4 ... వాడండి):
  - **మధ్యగతం = l + [(N/2 − c) ÷ f] × h**;
  - **Q_1 = l + [(N/4 − c) ÷ f] × h**, **Q_3 = l + [(3N/4 − c) ÷ f] × h**;
  - **D_i = l + [(iN/10 − c) ÷ f] × h**, **P_i = l + [(iN/100 − c) ÷ f] × h**;
  - l = ఆ విలువ ఉన్న తరగతి దిగువ పరిమితి, c = దానికి **ముందు** తరగతి cf, f = దాని పౌనఃపున్యం (frequency), h = తరగతి అంతరం (class interval).
- **బాహుళకం (mode, Z):** అత్యధిక పౌనఃపున్యం గల విలువ.
  - అవిచ్ఛిన్న శ్రేణి: **$Z = l + [(f_1 − f_0) ÷ (2f_1 − f_0 − f_2)] × h$**, దీనినే **$l + [\Delta_1 ÷ (\Delta_1 + \Delta_2)] × h$** అని కూడా రాస్తారు, $\Delta_1 = f_1 − f_0$, $\Delta_2 = f_1 − f_2$;
  - f_1 = బాహుళక తరగతి పౌనఃపున్యం, f_0 = ముందు తరగతి, f_2 = తర్వాత తరగతి.
- **అనుభావిక సంబంధం (empirical relation) (కార్ల్ పియర్సన్)**, మితమైన వక్రత (skewness) గల డేటాకు: **బాహుళకం = 3 మధ్యగతం − 2 సగటు**.
- **గ్రాఫ్‌లు: కంటే తక్కువ, కంటే ఎక్కువ ఒగివ్‌లు (ogives)** ఖండించుకునే x-విలువే మధ్యగతం (లేదా N/2 కంటే తక్కువ ఒగివ్‌ను కలిసే చోటు); బాహుళకాన్ని **హిస్టోగ్రామ్ (histogram)** నుంచి గుర్తిస్తారు.
- **ఓపెన్ ఎండ్ తరగతులకు (open-end classes)** మధ్యగతం, బాహుళకం కనుగొనవచ్చు; ఊహలు లేకుండా సగటును కనుగొనలేం.
- **A = మధ్యగతం అయినప్పుడు $\Sigma|x − A|$ కనిష్ఠం.**

ఉదాహరణ 1. 15, 22, 8, 30, 19, 27, 11 ల మధ్యగతం కనుగొనండి. సాధన. క్రమంలో: 8, 11, 15, 19, 22, 27, 30. N = 7, 4వ అంశం. **సమాధానం: 19**

ఉదాహరణ 2. 5, 12, 7, 20, 15, 9 ల మధ్యగతం కనుగొనండి. సాధన. క్రమంలో: 5, 7, 9, 12, 15, 20. 3.5వ అంశం: (9 + 12)/2. **సమాధానం: 10.5**

1. ముడి డేటా (raw data) చతుర్థాంశాలు.

ఉదాహరణ 3. 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 22 లకు Q_1, మధ్యగతం, Q_3 కనుగొనండి. సాధన. N = 11 (ఇప్పటికే క్రమంలో ఉంది). Q_1 = (12/4)వ = 3వ అంశం; మధ్యగతం = 6వ అంశం; Q_3 = (36/4)వ = 9వ అంశం. **సమాధానం: Q_1 = 7, మధ్యగతం = 12, Q_3 = 18**

2. విచ్ఛిన్న శ్రేణి.

ఉదాహరణ 4. మధ్యగతం, Q_1, Q_3, బాహుళకం కనుగొనండి.

x	10	20	30	40	50
f	4	7	12	9	8
cf	4	11	23	32	40

సాధన. N = 40.

- మధ్యగతం: (41/2) = 20.5వ అంశం; 20.5 కు సమానమైన లేదా మించిన మొదటి cf 23 → **30**.
- Q_1: (41/4) = 10.25వ అంశం; 10.25 కు సమానమైన లేదా మించిన మొదటి cf 11 → **20**.
- Q_3: 3 × 41/4 = 30.75వ అంశం; 30.75 కు సమానమైన లేదా మించిన మొదటి cf 32 → **40**.
- బాహుళకం: అత్యధిక పౌనఃపున్యం 12 → **30**.

3. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణి: ఒకే పట్టిక, అన్ని కొలతలు.

ఉదాహరణ 5.

తరగతి	f	cf
0–10	5	5
10–20	8	13
20–30	15	28
30–40	20	48
40–50	12	60
50–60	10	70

N = 70 (ఈ పట్టిక సగటు 33).

కొలత	స్థానం	తరగతి (l, c, f)	విలువ
మధ్యగతం	N/2 = 35	30–40 (30, 28, 20)	30 + (7/20) × 10 = **33.5**

కొలత	స్థానం	తరగతి (l, c, f)	విలువ
Q_1	N/4 = 17.5	20–30 (20, 13, 15)	20 + (4.5/15) × 10 = **23**
Q_3	3N/4 = 52.5	40–50 (40, 48, 12)	40 + (4.5/12) × 10 = **43.75**
D_7	7N/10 = 49	40–50 (40, 48, 12)	40 + (1/12) × 10 = **40.83**
P_{90}	90N/100 = 63	50–60 (50, 60, 10)	50 + (3/10) × 10 = **53**

బాహుళకం: బాహుళక తరగతి 30–40 (f_1 = 20, f_0 = 15, f_2 = 12). Z = 30 + [5 ÷ (40 − 27)] × 10 = 30 + 3.85.
సమాధానం: సుమారు 33.85 సరిచూడండి: 3 × 33.5 − 2 × 33 = 34.5, ఇది 33.85 కు దగ్గరగా ఉంది; దాదాపు సౌష్ఠవ డేటాకు ఇది ఊహించినదే.

4. అనుభావిక సంబంధం.

ఉదాహరణ 6. మితమైన వక్రత గల పంపిణీలో సగటు 52, బాహుళకం 46. మధ్యగతం కనుగొనండి. సాధన. మధ్యగతం = (2 సగటు + బాహుళకం) ÷ 3 = (104 + 46) ÷ 3. **సమాధానం: 50**

5. బాహుళక తరగతి మొదటి తరగతి అయినప్పుడు బాహుళకం. దానికి ముందు లేని తరగతి పౌనఃపున్యాన్ని 0 గా తీసుకోండి.

ఉదాహరణ 7. తరగతులు 0–20, 20–40, 40–60, పౌనఃపున్యాలు 30, 20, 10. బాహుళకం కనుగొనండి. సాధన. f_1 = 30, f_0 = 0, f_2 = 20. Z = 0 + [30 ÷ (60 − 0 − 20)] × 20. **సమాధానం: 15**

లక్షణం	మధ్యగతం	బాహుళకం
రకం	స్థాన సగటు	అత్యధికంగా వచ్చే విలువ
ఓపెన్ ఎండ్ తరగతులు	కనుగొనవచ్చు	కనుగొనవచ్చు
దేనికి ఉత్తమం	వక్రత గల డేటా (ఆదాయాలు, వేతనాలు)	సాధారణంగా ఎక్కువగా ఉండే పరిమాణం, ఫ్యాషన్, గుణాత్మక డేటా
బలహీనత	తీవ్ర అంశాల పరిమాణాన్ని పట్టించుకోదు	అస్పష్టంగా లేదా ద్విబాహుళకంగా ఉండవచ్చు

లోతైన విశ్లేషణ

1. కలుపుకొనే తరగతులు (inclusive classes). ఏ సూత్రం వాడే ముందైనా వాటిని మినహాయించే (exclusive) వాస్తవ తరగతి పరిమితులుగా (class limits) మార్చండి: దిగువ పరిమితుల నుంచి అంతరంలో సగం (ఇక్కడ 0.5)

తీసివేసి, ఎగువ పరిమితులకు కలపండి.

ఉదాహరణ 8. మధ్యగతం, బాహుళకం కనుగొనండి.

తరగతి	10–19	20–29	30–39	40–49
f	6	14	10	5

సాధన. వాస్తవ తరగతులు 9.5–19.5, 19.5–29.5, … N = 35, N/2 = 17.5, మధ్యగత తరగతి 19.5–29.5 (c = 6, f = 14).

- మధ్యగతం = 19.5 + (11.5/14) × 10 = **27.71**.
- బాహుళకం = 19.5 + [8 ÷ (28 − 6 − 10)] × 10 = **26.17**.

l గా 19.5 కు బదులు 20 వాడడం తరచూ జరిగే పొరపాటు, దానివల్ల సమాధానం తప్పు వస్తుంది.

2. ఇచ్చిన మధ్యగతం నుంచి లోపించిన పౌనఃపున్యం.

ఉదాహరణ 9. ఈ పంపిణీ మధ్యగతం 27. p కనుగొనండి.

తరగతి	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
f	5	p	20	15	5

సాధన. N = 45 + p. మధ్యగతం 27, 20–30 లో ఉంది, కాబట్టి c = 5 + p, f = 20. 27 = 20 + [((45 + p)/2 − (5 + p)) ÷ 20] × 10 నుంచి 14 = (35 − p)/2, కాబట్టి p = 7 (N = 52; సరిచూడండి: 20 + (26 − 12)/20 × 10 = 27). **సమాధానం: 7**

3. అస్పష్ట బాహుళకం. రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ విలువలకు అత్యధిక పౌనఃపున్యం ఒకటే అయినప్పుడు, లేదా అత్యధిక పౌనఃపున్యం చివరల దగ్గర ఉన్నప్పుడు, బాహుళకాన్ని **సమూహన పద్ధతి (grouping method)** ద్వారా గుర్తిస్తారు (పౌనఃపున్యాలను రెండేసి, మూడేసి కలుపుతారు; సమూహన పట్టికలో ఎక్కువసార్లు వచ్చే విలువే బాహుళకం); అదీ కుదరకపోతే అనుభావిక సంబంధం ద్వారా కనుగొంటారు.

4. అసమాన తరగతి అంతరాలు. బాహుళక సూత్రం వాడే ముందు, పౌనఃపున్యాలను ఒకే అంతరానికి సర్దుబాటు చేయండి (పౌనఃపున్య సాంద్రత), ఎందుకంటే వెడల్పైన తరగతి కేవలం వెడల్పుగా ఉన్నందుకే ఎక్కువ అంశాలను సేకరిస్తుంది.

5. గ్రాఫ్ ద్వారా గుర్తించడం.

- కంటే తక్కువ ఒగివ్: ఎగువ పరిమితులకు ఎదురుగా cf ని గుర్తించండి; మధ్యగతానికి N/2 ఎత్తు వద్ద, Q_1 కు N/4 వద్ద, Q_3 కు 3N/4 వద్ద x-విలువను చదవండి.
- రెండు ఒగివ్‌లు మధ్యగతం వద్ద ఖండించుకుంటాయి.
- హిస్టోగ్రామ్: బాహుళక దీర్ఘచతురస్రం పై కుడి మూలను దాని ముందు దీర్ఘచతురస్రం పై కుడి మూలతో, బాహుళక దీర్ఘచతురస్రం పై ఎడమ మూలను దాని తర్వాతి దీర్ఘచతురస్రం పై ఎడమ మూలతో కలపండి; ఈ రేఖలు

ఖండించుకునే చోటు నుంచి x-అక్షం మీదకు లంబం గీయండి; దాని పాదమే బాహుళకం.

6. విభాగ విలువల ఉపయోగాలు. చతుర్థాంశాల నుంచి **చతుర్థాంశ విచలనం (quartile deviation)** $(Q_3 - Q_1)/2$, **బౌలీ వక్రతా ప్రమాణం (Bowley's measure of skewness)** వస్తాయి; పోటీ పరీక్షల ర్యాంకులకు, వృద్ధి చార్టులకు శతాంశకాలు వాడతారు (90వ శతాంశకం అంటే 90% మంది ఆ విలువ లేదా అంతకంటే తక్కువ స్కోరు చేశారు).

తరచూ చేసే పొరపాట్లు

- ✗ "15, 22, 8, 30, 19 ల మధ్యగతం 8, రాసిన క్రమంలో మధ్యలో ఉన్న విలువ." ✓ **ముందుగా క్రమంలో అమర్చండి**: మధ్యగతం **19**.
- ✗ "సమూహ మధ్యగత సూత్రంలో c అంటే మధ్యగత తరగతి cf." ✓ c అంటే దానికి **ముందు** తరగతి cf.
- ✗ "బాహుళకం = 3 సగటు − 2 మధ్యగతం." ✓ **బాహుళకం = 3 మధ్యగతం − 2 సగటు**.
- ✗ "4 చతుర్థాంశాలు, 10 దశాంశకాలు ఉంటాయి." ✓ **3 చతుర్థాంశాలు, 9 దశాంశకాలు, 99 శతాంశకాలు**.
- ✗ "అవిచ్ఛిన్న శ్రేణిలో మధ్యగత తరగతిని (N + 1)/2 వద్ద కనుగొంటారు." ✓ అవిచ్ఛిన్న శ్రేణికి **N/2** వాడండి.
- ✗ "కలుపుకొనే తరగతి 20–29 కి l = 20." ✓ వాస్తవ పరిమితి **19.5** వాడండి.
- ✗ "కంటే తక్కువ ఒగివ్ x-అక్షాన్ని కలిసే చోట మధ్యగతం ఉంటుంది." ✓ **రెండు ఒగివ్‌లు ఖండించుకునే** చోట ఉంటుంది.

త్వరిత పునశ్చరణ

పరీక్షకు ముందు రోజు ఇది చదవండి

1.1 అంకగణిత, భారిత, గుణ, హార్మోనిక్ సగటులు, వాటి మధ్య సంబంధం

- AM = Σfx ÷ N; సోపాన విచలనం A + (Σfd′/N) × h.
- Σ(x − x̄) = 0; A = x̄ వద్ద Σ(x − A)² కనిష్ఠం.
- భారిత AM = Σwx ÷ Σw; సంయుక్త సగటు n తో భారం ఇస్తుంది.
- GM = (లబ్ధం)^(1/n) = antilog (Σf log x ÷ N).
- HM = N ÷ Σ(f/x).
- AM ≥ GM ≥ HM; అన్ని విలువలు సమానమైతేనే సమానం.
- రెండు సంఖ్యలు: $GM^2 = AM \times HM$.
- GM: వృద్ధి రేట్లు, నిష్పత్తులు, సూచిక సంఖ్యలు.
- HM: సమాన దూరాలపై వేగాలు, సమాన ఖర్చుతో ధరలు.
- సున్నా విలువ: GM గానీ HM గానీ లేవు.

1.2 ముడి, సమూహ డేటాకు మధ్యగతం, బాహుళకం, విభాగ విలువలు (చతుర్థాంశాలు, దశాంశకాలు, శతాంశకాలు)

- ముందుగా డేటాను క్రమంలో అమర్చండి: స్థాన సగటులు.
- ముడి/విచ్ఛిన్న: మధ్యగతం (N + 1)/2 వ, Q_1 (N + 1)/4 వ, Q_3 3(N + 1)/4 వ అంశం.
- అవిచ్ఛిన్న: l + [(స్థానం − c)/f] × h, స్థానం N/2, N/4, 3N/4, iN/10, iN/100.
- మధ్యగతం = $Q_2 = D_5 = P_{50}$.
- 3 చతుర్థాంశాలు, 9 దశాంశకాలు, 99 శతాంశకాలు.
- బాహుళకం = $l + [(f_1 - f_0)/(2f_1 - f_0 - f_2)] \times h$.
- బాహుళకం = 3 మధ్యగతం − 2 సగటు.
- ఒగివ్‌లు మధ్యగతం వద్ద ఖండించుకుంటాయి; హిస్టోగ్రామ్ బాహుళకాన్ని ఇస్తుంది.
- కలుపుకొనే తరగతులు: వాస్తవ పరిమితులుగా మార్చండి.
- ఓపెన్ ఎండ్ తరగతులతో మధ్యగతం, బాహుళకం పనిచేస్తాయి.

ప్రాక్టీస్ ప్రశ్నలు

19 ప్రశ్నలు · జవాబులు చివరలో

1. Consider the following statements:

1. The geometric mean is the appropriate average for averaging rates of growth and ratios.

2. The harmonic mean is the appropriate average of speeds when equal distances are covered at different speeds.

Which of the statements given above is/are correct?

a. 1 only

b. 2 only

c. Both 1 and 2

d. Neither 1 nor 2

2. Find the median daily wage (₹) of the following workers.

Daily wage: Below 200, 200–300, 300–400, 400–500, 500 and above

No. of workers: 10, 18, 32, 25, 15

a. 350

b. 268.75

c. 368.75

d. 370.31

3. The geometric mean of a set of positive observations is 6. If every observation is squared, what is the geometric mean of the new set?

a. 12

b. 6

c. 72

d. 36

4. Find the median of the following discrete frequency distribution.

x: 10, 20, 30, 40, 50, 60

f: 12, 9, 8, 10, 6, 5

a. 35

b. 10

c. 25

d. 30

5. The mean of 20 observations was found to be 15. Later it was found that one observation, 52, had been recorded as 25, and that another observation, 30, should not have been included at all. What is the correct mean of the remaining observations?

a. 16.35

b. 15.63

c. 14.85

d. 14.21

6. For the observations 2, 5, 9, 14 and 20, the sum $\Sigma|x - a|$ is the least for which value of a?

a. 11
b. 10
c. 9
d. 5

7. A constant 5 is added to every one of a set of positive observations. Which of the following averages increases by exactly 5?

a. The geometric mean and the harmonic mean only
b. All three: arithmetic, geometric and harmonic means
c. None of the three averages
d. The arithmetic mean only

8. Which of the following are merits of the median?

1. It can be found for a distribution with open-end classes.
2. It can be located graphically.
3. It is based on all the observations.
4. It is well suited to further algebraic treatment.

Select the correct answer using the code given below.

a. 1, 2 and 3 only
b. 2 and 4 only
c. 1, 2, 3 and 4
d. 1 and 2 only

9. Consider the following statements about the geometric mean (GM) of positive values:

1. The logarithm of the GM equals the arithmetic mean of the logarithms of the observations.
2. The GM of the ratios x/y of paired values equals the ratio of the GM of x to the GM of y.
3. The GM of a set of values is never smaller than their arithmetic mean.

Which of the statements given above is/are correct?

a. 1 and 2 only
b. 1 and 3 only
c. 2 and 3 only
d. 1, 2 and 3

10. For the distribution below, find the mean and the median, and then estimate the mode by the empirical relation.

Class: 0–10, 10–20, 20–30, 30–40, 40–50
Frequency: 4, 10, 16, 12, 8

a. 26
b. 26.625
c. 26.94
d. 27.25

11. Consider the following statements about the arithmetic mean $\bar{x}$ of a set of observations:

1. $\bar{x}$ always lies between the smallest and the largest observation (both included).

2. The sum of the deviations $\Sigma(x - \bar{x})$ is zero only when the distribution is symmetrical.

Which of the statements given above is/are correct?

a. 1 only
b. 2 only
c. Both 1 and 2
d. Neither 1 nor 2

12. Match List I (measure for grouped data) with List II (formula). L = lower boundary, f = frequency and h = width of the class concerned; c = c.f. of the class before it; f1, f0, f2 = frequencies of the modal class and of the classes before and after it.

List I:

A. Mode

B. Median

C. Third quartile

D. Seventh decile

List II:

1. $L + (7N/10 - c)/f \times h$

2. $L + (f1 - f0)/(2f1 - f0 - f2) \times h$

3. $L + (3N/4 - c)/f \times h$

4. $L + (N/2 - c)/f \times h$

Select the correct answer using the code given below.

a. A-4, B-2, C-3, D-1
b. A-2, B-4, C-1, D-3
c. A-2, B-4, C-3, D-1
d. A-4, B-2, C-1, D-3

13. A car travels from A to B at 40 km/h and returns over the same distance at 60 km/h. What is its average speed for the whole journey?

a. 44
b. 46
c. 50
d. 48

14. Consider the following statements:

1. The second quartile, the fifth decile and the fiftieth percentile of a distribution are all equal to the median.

2. The seventh decile of a distribution is the same as its seventy-fifth percentile.

Which of the statements given above is/are correct?

a. 1 only
b. 2 only
c. Both 1 and 2
d. Neither 1 nor 2

15. A car covers the first 60 km of a journey at 20 km/h and the next 60 km at 30 km/h. It then travels for 4 hours at 60 km/h. What is its average speed for the whole journey?

a. 30 km/h
b. 36.67 km/h
c. 40 km/h
d. 48.33 km/h

16. Consider the following statements:

1. For a grouped distribution with unequal class intervals, the frequencies should be adjusted to a common class width before the mode is calculated by the formula.
2. For a grouped distribution with unequal class intervals, the classes must be made equal before the median can be calculated by the formula.

Which of the statements given above is/are correct?

a. 1 only
b. 2 only
c. Both 1 and 2
d. Neither 1 nor 2

17. Match List I (average) with List II (most suitable use):

List I:

A. Arithmetic mean
B. Geometric mean
C. Harmonic mean
D. Weighted arithmetic mean

List II:

1. Average speed when equal distances are covered at different speeds
2. Average rate of growth of population over several years
3. Average of items of unequal importance, such as a cost of living index
4. Average marks of students in a class

Select the correct answer using the code given below.

a. A-4, B-1, C-2, D-3
b. A-3, B-2, C-1, D-4
c. A-4, B-2, C-3, D-1
d. A-4, B-2, C-1, D-3

18. A moderately skewed distribution has mean 45, mode 36 and standard deviation 10.

Consider the following statements:

1. The median is about 42.
2. The distribution is positively skewed.
3. Karl Pearson's coefficient of skewness is 0.9.
4. If 5 is added to every observation, the coefficient of skewness becomes 1.4.

Which of the statements given above are correct?

a. 1, 2 and 3 only
b. 1 and 2 only
c. 2, 3 and 4 only
d. 1, 2, 3 and 4

19. What is the arithmetic mean of the squares of the first 10 natural numbers, 1^2, 2^2, ..., 10^2?

a. 30.25
b. 38.5
c. 55
d. 385

ಜವಾಬುಲು: 1-(c) 2-(c) 3-(d) 4-(d) 5-(b) 6-(c) 7-(d) 8-(d) 9-(a) 10-(b) 11-(a) 12-(c) 13-(d) 14-(a) 15-(c) 16-(a) 17-(d) 18-(a) 19-(b)